2

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA BORROSA

En 1965, L. A. Zadeh introduce la teoría de conjuntos borrosos [158], como un mecanismo para representar la vaguedad e imprecisión de los conceptos empleados en el lenguaje natural. Estos conjuntos *borrosos*[1] fueron definidos como una extensión de los conjuntos clásicos capaz de modelar la imprecisión propia de los conceptos humanos. A mediados de los 70 llega la ampliación del concepto de conjunto al de lógica, apareciendo las lógicas borrosas y las aplicaciones a sistemas de control. Hoy en día son muchas las aplicaciones tanto industriales como domésticas que hacen uso de este paradigma.

2.1 CONJUNTOS BORROSOS

Como se ha apuntado, el origen de la lógica borrosa es la noción de conjunto borroso. Antes de abordar el estudio de la Teoría de Conjuntos Borrosos, se revisarán algunos de los conceptos básicos de la Teoría Clásica, con el objeto de alcanzar una mayor comprensión de ambas.

2.1.1 Revisión de la Teoría Clásica de Conjuntos

Definiciones, terminología y notación

El punto de partida de la teoría de conjuntos son las nociones de *elemento* y de *conjunto*. Un conjunto se define genéricamente como una colección de elementos. Típicamente los elementos que forman parte de un conjunto tienen algún tipo de propiedad en común que les haga susceptibles de pertenecer al conjunto, pero tal requisito es meramente anecdótico. El conjunto se suele representar con una letra mayúscula, tipo A, B, C, etc..., y los elementos del mismo se representan con una letra minúscula (a,b,c, etc).

Sobre los conjuntos se define una relación de pertenencia, la cual se denota con el símbolo $\in$. Así pues, si el elemento a pertenece al conjunto A, este hecho se formaliza

[1] No existe un consenso claro respecto a la mejor traducción del término *fuzzy*. Algunos autores optan por *difuso*, mientras que otros lo hacen por *borroso*.

mediante la expresión

$$a \in A$$

En el caso en que b no pertenezca a A se escribe

$$b \notin A$$

Respecto a la forma de descripción del conjunto, ésta se puede realizar de manera enumerativa, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, o bien, mediante la ley de formación a la que se ha hecho referencia $A =$'*los diez primeros números naturales*'. Tal definición, como puede imaginarse, es equivalente a escribir de forma enumerativa $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

Se define el *cardinal* de un conjunto como el número de elementos que forman parte de dicho conjunto. Si dicho cardinal es un número finito, el conjunto se denominará finito. Caso contrario será infinito. Dentro de estos últimos, deben distinguirse los de cardinal numerable, que serán aquellos cuyos elementos se pueden poner en relación 1:1 con los números enteros (por ejemplo, el conjunto de los números pares); por otra parte nos encontraremos conjuntos de cardinal no numerable, como, por ejemplo, el conjunto de los números reales comprendidos entre dos números a y b.

La relación de inclusión se deriva de la relación de pertenencia; un conjunto B se dice que está incluido dentro de un conjunto A cuando todos los elementos de B están en A. Si tal es el caso, podemos expresar de forma abreviada que $B \subset A$, o bien que $A \supset B$. Si se verifica que $B \subset A$ y que $A \subset B$ de forma simultánea, entonces es que los dos conjuntos son iguales.

Dos conjuntos de dice que son *disjuntos* si no tienen ningún elemento en común. A estos conjuntos se les denomina también mutuamente excluyentes.

Dado un problema, el conjunto universal, denotado por S[2], será el conjunto formado por todos los elementos del problema. De forma complementaria, el conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, será un conjunto sin ningún elemento. Como es natural, los conjuntos S y $\emptyset$ son mutuamente excluyentes.

Sea S un universo del cual cualquier conjunto A es subconjunto, esto es:

$$A \subseteq S, \;\; \forall A$$

En teoría clásica de conjuntos cualquier elemento x perteneciente a S pertenece o no pertenece al subconjunto A de manera clara e inequívoca, sin que exista ninguna otra posibilidad al margen de estas dos.

La pertenencia o no de un elemento arbitrario x a un subconjunto A viene dada en la mayoría de los casos por la verificación o no de un predicado que caracteriza a A y da lugar a una bipartición del universo de discurso S.

[2] En lógica borrosa, el término universo suele ir acompañado del término "de discurso". En lo que sigue emplearemos tal denominación.

Por ejemplo, sea S el universo de discurso formado por todos los ríos del mundo. Definiremos el conjunto A como aquél que está formado por todos aquellos elementos de S que verifiquen el predicado "x fluye por Europa". Por citar algunos ejemplos ilustrativos:

$$\begin{array}{ll} \text{“Rhin”} & \in A \\ \text{“Nilo”} & \notin A \\ \text{“Ebro”} & \in A \end{array}$$

Debe hacerse notar que ha sido posible proporcionar una definición clásica del conjunto A porque su correspondiente predicado permite la bipartición del universo S.

Función característica

El concepto de pertenencia o no de un elemento a un conjunto A puede expresarse numéricamente mediante una *función característica*[3]. Esta función asigna a cada elemento x del universo de discurso un dígito binario (1 ó 0) según x pertenezca o no al conjunto A [59].

$$\varphi_A : S \longrightarrow \{0,1\} \;\; \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Cualquier conjunto $A \subset S$ se puede definir por los pares que forman cada elemento x del universo y su función característica, expresándose de la siguiente forma:

$$A = \{(x, \varphi_A(x)) | x \in S\} \tag{2.2}$$

Por ejemplo, el conjunto $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ se puede representar por su función característica

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Operaciones básicas entre conjuntos

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B incluidos en S es posible definir un conjunto de operaciones básicas entre ellos [66, 130]:

Complemento: El complemento de A se denota por $\overline{A}$, y está formado por todos los elementos de S que no pertenecen a A (operador unario).

$$x \in \overline{A} \text{ si } x \notin A \tag{2.3}$$

Su función de característica será:

$$\varphi_{\overline{A}}(x) = 1 - \varphi_A(x) \tag{2.4}$$

[3] Algunos autores la denominan también *función de pertenencia*. En este texto se ha optado por usar *función característica* para los conjuntos clásicos y *función de pertenencia* para los borrosos.

Intersección: se denota por $A \cap B$ y se define como el conjunto formado por aquellos elementos de S que pertenecen a A y a B simultáneamente:

$$x \in A \cap B \text{ si } x \in A \text{ y } x \in B \tag{2.5}$$

La función característica correspondiente es:

$$\varphi_{A\cap B}(x) = \min(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) \tag{2.6}$$

Unión: Es el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A, o pertenecen a B, o bien a ambos simultáneamente. Se denota por $A \cup B$ y su función característica es:

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \max(\varphi_A(x), \varphi_B(x)) \tag{2.7}$$

Propiedades de los conjuntos clásicos

Las operaciones entre conjuntos clásicos presentan ciertas leyes y propiedades:

1. Propiedad conmutativa
$$\begin{array}{c} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \tag{2.8}$$
2. Propiedad asociativa
$$\begin{array}{c} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \tag{2.9}$$
3. Leyes de idempotencia
$$\begin{array}{c} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array} \tag{2.10}$$
4. Leyes de absorción
$$\begin{array}{c} (A \cup B) \cap A = A \\ (A \cap B) \cup A = A \end{array} \tag{2.11}$$
5. Propiedad distributiva
$$\begin{array}{c} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \tag{2.12}$$
6. Propiedades de absorción por S y $\emptyset$
$$\begin{array}{rcl} A \cup S & = & S \\ A \cap \emptyset & = & \emptyset \end{array} \tag{2.13}$$

7. Propiedades de identidad

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap S &= A \end{aligned} \tag{2.14}$$

8. Involución del complemento

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{2.15}$$

9. Leyes de Morgan

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned} \tag{2.16}$$

10. Leyes complementarias

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= S \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \end{aligned} \tag{2.17}$$

Lógica Clásica: Operadores y procedimientos de inferencia

El razonamiento en Lógica Clásica se realiza según dos esquemas de inferencia conocidos como *modus ponens* (MP) y *modus tollens* (MT). El primero de ellos es el fundamento del procedimiento de encadenamiento hacia adelante, mientras que el segundo se puede identificar con el encadenamiento hacia atrás [130, 131].

	Regla:	Si X es A,	entonces	Y es B
MP:	Hecho:	X es A		
	Conclusión:			Y es B

	Regla:	si X es A,	entonces	Y es B
MT:	Hecho:			Y es B
	Conclusión:	X es A		

En "razonamiento clásico" se compara el hecho, fruto de la observación, con el condicional de la regla. En caso de verificarse este último, se infiere de manera inmediata la correspondiente conclusión. La verificación ha de ser exacta, pues de lo contrario la regla en cuestión no será utilizable y no podrá efectuarse razonamiento alguno.

2.1.2 Extensión a conjuntos borrosos

En la sección 2.1.1 se ha visto cómo la mayoría de las veces los conjuntos clásicos se definen mediante un predicado que da lugar a una clara bipartición del universo de discurso S. Sin embargo, el razonamiento humano utiliza frecuentemente predicados de los cuales no resulta esa bipartición; son los denominados *predicados vagos*.

Siguiendo con el universo de discurso anterior, el formado por todos los ríos del mundo, podemos definir en él el conjunto B como aquél formado por los ríos "largos".

Por supuesto, es imposible dar a B una definición clásica, ya que su correspondiente predicado no divide el universo S en dos partes claramente diferenciadas. No resulta nada fácil afirmar con rotundidad que un río es "largo" o no lo es. El problema podría resolverse en parte considerando que un río es "largo" cuando su longitud supera cierto umbral fijado de antemano. Decimos que el problema tan sólo se resuelve en parte, y de manera no muy convincente, por dos motivos: de una parte el umbral mencionado se establece de una manera arbitraria, y por otro lado podría darse el caso de que dos ríos de longitudes muy diferentes fuesen considerados ambos como "largos". Evidentemente, el concepto "largo" así definido nos daría una información muy pobre sobre la longitud del río en cuestión.

La manera más apropiada de dar solución a este problema es considerar que la pertenencia o no pertenencia de un elemento x al conjunto B no es absoluta sino gradual. En definitiva, definiremos B como un conjunto borroso [90, 109] (*fuzzy set* en la bibliografía anglosajona). Su función característica (ahora "de pertenencia") ya no adoptará valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$, sino en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Mediante notación matemática se define un conjunto borroso A como:

$$A = \{(x, \mu_A(x))|x \in S\} \tag{2.18}$$

Función de pertenencia

La función característica es reemplazada por una *función de pertenencia* que se define

$$\mu_A : S \longrightarrow [0, 1] \tag{2.19}$$

de tal modo que $\mu_A(x) \in [0, 1]$ es el grado con el que un elemento $x \in S$ (siendo S el universo de discurso) pertenece al conjunto borroso A. Cuando $\mu_A(x) = 0$ el elemento no pertenece al conjunto, y cuando $\mu_A(x) = 1$ pertenece totalmente.

La forma de la función de pertenencia tiene una cierta componente *subjetiva*, frente a la forma rígida (objetiva) de las funciones características de la lógica clásica. En función de la aplicación de los conjuntos o de los conceptos representados por ellos, estas funciones pueden adquirir muy diversas formas, y muchas veces pueden ser elegidas con un amplio grado de libertad por parte del "diseñador", lo que en la práctica puede traducirse como la posibilidad de incluir cierto conocimiento experto.

A pesar de que las funciones podrían tener cualquier forma, en la literatura se tiende a trabajar con funciones de pertenencia estándares [114] (Fig. 2.1):

1. Funciones Gaussianas o con forma de S (Fig. 2.1(a)). Usan la fórmula

$$\mu(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x-m)^2}{2d^2}\right)$$

Permiten modelar fácilmente *modificadores* (sec. 2.1.9) pero son complicadas para el cálculo.

2. Funciones triangulares o trapezoidales [45]. Se definen en función de los vértices de las funciones; $\Delta(a, b, c)$ para las triangulares (Fig. 2.1(b)) y $T(a, b, c, d)$ para las trapezoidales (Fig. 2.1(c)). Son sencillas de manejar en algoritmos numéricos.

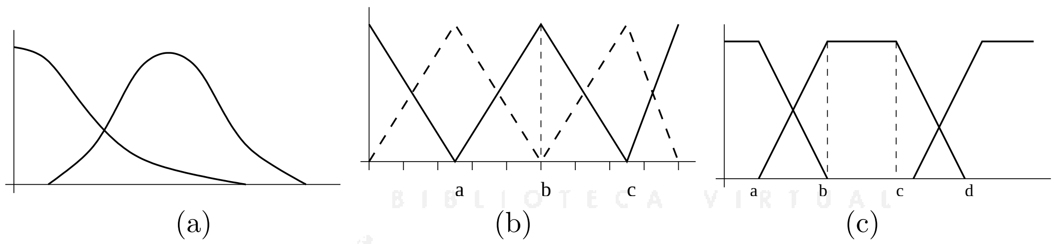

Figura 2.1 Funciones de pertenencias típicas: a) Gaussianas, b) Triangulares c) Trapezoidales.

Zeng y Singh [174] definen un modelo de función de pertenencia que agrupa a las principales clases, la función Pseudo-trapezoidal.

Definición 1 (Función Pseudo-trapezoidal (PTS))
La función PTS (Del inglés *pseudo trapezoid-shaped*) es una función continua dada por

$$A(x; a, b, c, d, h) = \begin{cases} I(x) & x \in [a, b) \\ h & x \in [b, c] \\ D(x) & x \in (c, d] \\ 0 & x \in U - [a, d] = \{x | x \in U, x \notin [a, d]\} \end{cases}$$

donde $a \leq b \leq c \leq d$, $a < d$, $I(x) \geq 0$ es una función monótona estrictamente creciente en $[a, b)$ y $D(x) \geq 0$ es una función monótona estrictamente decreciente en $(c, d]$ (Fig. 2.2). Cuando la función de pertenencia de un conjunto borroso A es una función PTS, se llama función de pertenencia PTS y se denota por $A(x) = A(x; a, b, c, d, h)$. Cuando el conjunto borroso es normal (es decir, $h = 1$), su función de pertenencia se denota simplemente por $A(x) = A(x; a, b, c, d)$.

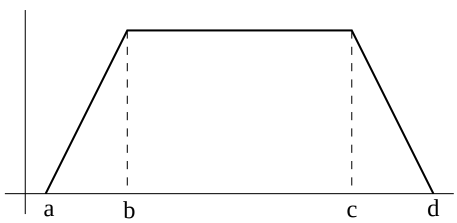

Figura 2.2 Función Pseudo-trapezoidal (PTS)

De acuerdo con la Definición 1, las funciones trapezoidales son un caso especial de las funciones PTS cuando $b < c$ y

$$I(x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad D(x) = \frac{x - d}{c - d}$$

y las funciones triangulares es el caso especial cuando $b = c$ y

$$I(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{c-a}, \quad D(x) = \frac{x-d}{c-d} = \frac{x-d}{b-d}$$

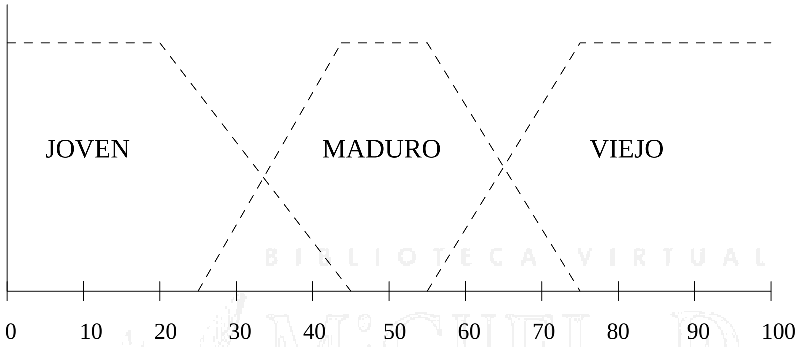

Figura 2.3 Ejemplo de conjuntos borrosos

Como ejemplo, en la figura 2.3 se muestran algunos conjuntos borrosos definidos en el universo de discurso *Edad*. El conjunto borroso "Joven" representa el grado de pertenencia respecto al parámetro juventud que tendrían los individuos de cada edad. Dicho de otra manera, el conjunto expresa la posibilidad de que un individuo sea caracterizado como "Joven". Un conjunto borroso podría ser considerado una distribución de posibilidad, que es diferente a una distribución de probabilidad [32].

Puede verse que los conjuntos borrosos de la figura 2.3 se superponen, entonces un individuo x, podría tener un grado de pertenencia en dos conjuntos: "Joven" y "Maduro", indicando que posee cualidades asociadas con ambos conjuntos.

Por razones prácticas, muchas veces se asume que el universo de discurso S es finito, esto es $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$, y el par $\{(\mu_A(x), x)\}$ se denota por $\mu_A(x)/x$, y cada par $\mu_A(x)/x$ se denomina *individualidad borrosa* (*fuzzy singleton*) [59, 66]. El conjunto borroso A se puede reescribir como

$$\begin{aligned} A &= \{(\mu_A(x), x)\} = \{\mu_A(x)/x\} = \\ &= \mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $+$ y $\sum$ deben entenderse en el sentido de la teoría de conjuntos. Por convenio, los pares $\mu_A(x)/x$ con $\mu_A(x) = 0$ se omiten.

2.1.3 Definiciones básicas sobre conjuntos borrosos

A continuación se presentan una serie de definiciones básicas de utilidad en el manejo de los conjuntos borrosos [59][4]:

[4]A partir de este punto se considerará $U \subset R$ el universo de discurso para los conjuntos borrosos.

Definición 2 (Conjunto vacío)
Se dice que un conjunto borroso A está vacío, y se escribe $A = \emptyset$, si y sólo si

$$\mu_A(x) = 0, \qquad \forall x \in U$$

Definición 3 (Igualdad)
Se dice que dos conjuntos borrosos A y B definidos sobre el mismo universo de discurso U son iguales, y se escribe $A = B$ si y sólo si

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \qquad \forall x \in U$$

Definición 4 (Contención)
Se dice que un conjunto borroso A definido en U está contenido en B en U (o alternativamente, es un subconjunto de B), y se escribe $A \subseteq B$, si y sólo si

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \qquad \forall x \in U$$

Definición 5 (Normalidad)
Se dice que un conjunto borroso A definido en U es normal si y sólo si

$$\max_{x \in U} \mu_A(x) = 1$$

Definición 6 (Soporte)
El soporte de un conjunto borroso A en U (escrito supp$A$ o bien S_A) es el conjunto no borroso

$$S_A = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$$

y $\emptyset \subseteq S_A \subseteq U$.

Zeng y Singh [174] introducen unas nuevas definiciones que conducen al concepto de *orden* entre conjuntos borrosos.

Sea el espacio de entrada $U \subset R$ el universo de discurso; los conjuntos borrosos A_i definidos sobre S $(i = 1, 2, \cdots, N)$ son conjuntos borrosos y $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ son las funciones de pertenencia borrosas correspondientes.

Definición 7 (Partición completa)
Se dice que los conjuntos borrosos $A_1, A_2, \cdots, A_N$ son una partición completa de U si $\forall x \in U$ existe al menos un A_i $(i = 1 \leq i \leq N)$ tal que $A_i(x) > 0$. Por simplicidad, se dice que los conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son completos si forman una partición completa.

Definición 8 (Consistencia)
Se dice que los conjuntos borrosos $A_1, A_2, \cdots, A_N$ son consistentes si se verifica que si $A_i(x_0) = 1$ para algún $x_0 \in U$, entonces $\forall j \neq i$, $A_j(x_0) = 0$.

Definición 9 (Subconjunto Normal de un Conjunto Borroso Normal)
Se define el subconjunto normal de un conjunto borroso normal A como

$$M(A) = \{x | x \in U \text{ y } A(x) = 1\}$$

que es un subconjunto de S_A (el soporte del conjunto borroso A). Si el conjunto borroso normal A tiene función de pertenencia PTS, entonces $M(A) = [b, c]$.

Definición 10 (Orden entre Conjuntos Borrosos Normales)
Para dos conjuntos borrosos normales A y $B \subset U$, se dice que $A > B$ si $M(A) > M(B)$, definiéndose esta desigualdad como

$$\max_x M(A) > \max_x M(B)$$

Proposición 1
[5] Si A_i son conjuntos borrosos normales en $U \subset R$ con funciones de pertenencia PTS $A_i(x) = A_i(x; a_i, b_i, c_i, d_i)$ $(i = 1 \leq i \leq N)$, existe una reordenación $\{i_1, i_2, \cdots, i_N\}$ de $\{1 \leq i \leq N\}$ tal que

$$A_{i_1} < A_{i_2} < \cdots < A_{i_N}$$

2.1.4 Operaciones entre conjuntos borrosos

Las tres operaciones básicas definidas sobre los conjuntos clásicos (complemento, intersección y unión) pueden ser generalizadas a los conjuntos borrosos de diversas formas. Dentro de la teoría de los conjuntos borrosos tiene especial relevancia la que hace uso de operaciones conocidas como *operaciones estándar* (Fig 2.4), definidas como:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Intersección:} & \mu_{A\cap B}(x) & = & \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \text{Unión:} & \mu_{A\cup B}(x) & = & \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ \text{Complemento:} & \mu_{\overline{A}}(x) & = & 1 - \mu_A(x) \end{array}$$

No obstante, al contrario que pasa con los conjuntos clásicos, ésta no es la única forma posible de definir estas operaciones; diferentes funciones pueden ser apropiadas para representarlas en diferentes contextos. Por lo tanto, no sólo las funciones de pertenencia de los conjuntos borrosos van a ser dependientes del contexto sino también las operaciones sobre dichos conjuntos [66].

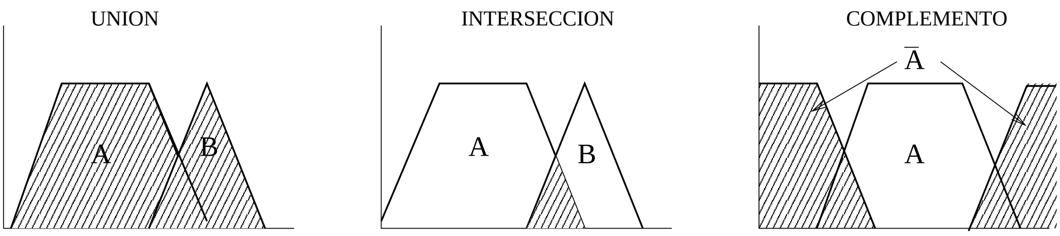

Figura 2.4 Operaciones básicas entre conjuntos borrosos. Definición estándar

Complemento borroso

Dado un conjunto borroso $A \subset U$, se define su complemento como el conjunto borroso $\overline{A}$ cuya función de pertenencia viene dada por la expresión

$$\mu_{\overline{A}}(x) = C(\mu_A(x)), \ \forall x \in U \tag{2.21}$$

donde $C(x)$ es una función que debe cumplir las siguientes propiedades:

[5] La demostración de esta proposición puede encontrarse en [174]

1. Condiciones de contorno: $C(0) = 1$, $C(1) = 0$.
2. Monotonía: para todo $a, b \in [0, 1]$, si $a \leq b$, entonces $C(a) \geq C(b)$

La función $C(x)$ es conocida por algunos autores como *c-norma* [93].

En la mayoría de los casos, es deseable considerar algunos requerimientos adicionales para estas funciones:

3. $C(x)$ es una función continua.
4. $C(x)$ es involutiva, lo que significa que $C(C(a)) = a$, $\forall a \in [0, 1]$

Existen muchas funciones que cumplen las propiedades antes descritas, y que por lo tanto pueden ser usadas para representar el complemento borroso. Algunas de ellas son:

$$
\begin{array}{ll}
C(x) = 1 - x & \text{Negación} \\
C(x) = \frac{1-x}{1-\lambda x} \ \lambda \in (0, \infty) & \text{Sugeno} \\
C(x) = (1 - x^w)^{1/w} \ w \in (0, \infty) & \text{Yager}
\end{array}
$$

Intersección borrosa: t-norma

Dados dos conjuntos borrosos A y B, definidos sobre un mismo universo de discurso U, se define su intersección como un conjunto borroso $A \cap B$ cuya función de pertenencia viene dada por la expresión

$$\mu_{A \cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)], \ \forall x \in U \tag{2.22}$$

donde la función $T(x, y)$ es una *norma triangular* o *t-norma* [66, 130]. Una t-norma es una aplicación $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que verifica las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $T(x, y) = T(y, x), \ \forall x, y \in [0, 1]$.
2. Asociativa: $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)), \ \forall x, y, z \in [0, 1]$.
3. Monotonía: si $(x \leq y)$ y $(w \leq z)$ entonces $T(x, w) \leq T(y, z)$, $\forall x, y, w, z \in [0, 1]$.
4. Elemento absorbente: $T(x, 0) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.
5. Elemento neutro: $T(x, 1) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

Existen muchas funciones que cumplen estas propiedades y que por lo tanto pueden ser utilizadas para representar la intersección entre conjuntos borrosos. Algunas de ellas son las siguientes:

$T(x,y) = \min(x,y)$	Mínimo
$T(x,y) = \max(0, x+y-1)$	Diferencia acotada
$T(x,y) = x \cdot y$	Producto algebraico
$T(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } \max(x,y)=1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$	Producto drástico

En ocasiones es necesario restringir las posibles t-normas considerando tres requerimientos adicionales [66]:

1. Continuidad: $T()$ es una función continua.
2. Subidempotencia: $T(x,x) < x$.
3. Monotonía estricta: $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$ implica $T(a_1,b_1) < T(a_2,b_2)$.

El axioma de continuidad previene de una situación en la que un pequeño cambio en el grado de pertenencia de los conjuntos A ó B produzca un cambio grande (discontinuo) en el grado de pertenencia de $A \cap B$. La subidempotencia se tiene en cuenta cuando los grados de pertenencia de A y B para alguna x tienen el mismo valor. Este axioma expresa el requerimiento de que el grado de pertenencia de $A \cap B$ en este caso no exceda este valor. El tercer requerimiento es una condición más fuerte de monotonía.

Es habitual encontrar en la bibliografía la intersección de dos conjuntos borrosos expresada como

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \tag{2.23}$$

donde $\wedge$ representa al operador mínimo (intersección borrosa estándar). En el capítulo 4 y en el apéndice B se empleará el símbolo $\bigcap$ como indicativo de la t-norma.

Unión borrosa: t-conorma

Dados dos conjuntos borrosos A y B definidos sobre el mismo universo de discurso U, se define su unión como un conjunto borroso $A \cup B$ cuya función de pertenencia viene dada por la expresión:

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A, \mu_B),\ \forall x \in U \tag{2.24}$$

donde la función $S(x,y)$ es una *conorma triangular*, también llamada *t-conorma* o *s-norma*. Es una aplicación $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que satisface los siguientes requisitos:

1. Conmutatividad: $S(x,y) = S(y,x)$, $\forall x,y \in [0,1]$
2. Asociatividad: $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$, $\forall x,y,z \in [0,1]$
3. Monotonía: si $(x \leq y)$ y $(w \leq z)$ entonces $S(x,w) \leq S(y,z)$, $\forall x,y,w,z \in [0,1]$.
4. Elemento absorbente: $S(x,1) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.

5. Elemento neutro: $S(x, 0) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

Al igual que en los casos anteriores, existe un gran número de funciones que cumplen estas propiedades y que pueden ser utilizadas para representar la unión. Algunos ejemplos son:

$$\begin{array}{ll}
S(x,y) = \max(x,y) & \text{Máximo} \\
S(x,y) = \min(1, x+y) & \text{Suma acotada} \\
S(x,y) = x + y - x \cdot y & \text{Suma algebraica} \\
S(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } \min(x,y) = 0 \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} & \text{Suma drástica}
\end{array}$$

En ocasiones es necesario restringir las posibles t-conormas considerando tres requerimientos adicionales [66], que tengan en cuenta casos especiales, tal y como se hizo para la t-norma:

1. Continuidad: $S()$ es una función continua.
2. Superidempotencia: $S(x, x) > x$
3. Monotonía estricta: $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$ implica $S(a_1, b_1) < S(a_2, b_2)$

Es corriente encontrar en la bibliografía la unión de dos conjuntos borrosos expresada como

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \tag{2.25}$$

donde $\vee$ representa al operador máximo (unión borrosa estándar). En el capítulo 4 y en el apéndice B se empleará el símbolo $\bigcup$ como indicativo de la t-conorma.

Relación entre operaciones borrosas

De las propiedades generales de las t-normas y t-conormas es fácil deducir que estas funciones están acotadas por las funciones mínimo y máximo:

$$T(x, y) \leq \min(x, y)\ \forall x, y \in [0, 1] \tag{2.26}$$

$$S(x, y) \geq \max(x, y)\ \forall x, y \in [0, 1] \tag{2.27}$$

Una determinada elección de los operadores unión, intersección y complemento pueden verificar las leyes de Morgan generalizadas:

$$C(T(x, y)) = S(C(x), C(y)) \tag{2.28}$$

$$C(S(x, y)) = T(C(x), C(y)) \tag{2.29}$$

En ese caso se dice que la t-norma y la t-conorma son duales respecto al complemento borroso. En general, dada una función de complemento, se puede asociar una t-norma a cada s-norma (y viceversa). Por ejemplo, utilizando la negación como complemento, las parejas mínimo-máximo y producto-suma verifican las leyes de Morgan generalizadas.

No todas las t-normas y t-conormas van a ser duales ni van a ser distibutivas. De acuerdo con [66]:

1. La terna $\{\min, \max, C\}$ es dual respecto al complemento borroso C.
2. Los operadores mínimo y máximo también verifican la propiedad distributiva:

$$\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z)) \tag{2.30}$$

$$\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)) \tag{2.31}$$

3. Dada una t-norma T y un complemento borroso involutivo C, la operación binaria S en $[0, 1]$ definida por

$$S(a, b) = C(T(C(a), C(b))$$

$\forall a, b \in [0, 1]$, es una t-conorma tal que $\{T, S, C\}$ es una terna dual.

4. Dada una t-conorma S y un complemento involutivo C, la operación binaria T en $[0, 1]$ definida por

$$T(a, b) = C(S(C(a), C(b))$$

$\forall a, b \in [0, 1]$, es una t-norma tal que $\{T, S, C\}$ es una terna dual.

5. Sea $\{T, S, C\}$ una terna dual que satisface las leyes complementarias, esto es

$$S(x, C(x)) = U$$

$$T(x, C(x)) = \emptyset$$

Entonces $\{T, S, C\}$ no satisface las leyes distributivas.

2.1.5 Propiedades de los conjuntos borrosos

Las leyes y propiedades que, según se ha visto, cumplen los conjuntos clásicos no siempre se cumplen en el caso de los conjuntos borrosos. A continuación se analizará qué leyes verifican los conjuntos borrosos y cuáles no:

1. Propiedad conmutativa: siempre se verifica, debido a que las t-normas y las t-conormas son conmutativas por definición.
2. Propiedad asociativa: también se verifica puesto que las t-normas y las t-conormas también son asociativas.

3. Leyes de idempotencia: se cumplen si se elige el mínimo y el máximo como operadores para la intersección y la unión respectivamente. Pero si se escoge por ejemplo el producto algebraico y la suma algebraica, no se cumplen.
4. Leyes de absorción: también se cumplen si se elige el par mínimo-máximo. Con otras normas no ocurre necesariamente lo mismo.
5. Propiedad distributiva: también se cumple para el mínimo y el máximo, pero no necesariamente para otras normas.
6. Propiedades de absorción e identidad: siempre se cumplen debido a la última propiedad de las t-normas y t-conormas.
7. Involución del complemento: es cierta si se define $\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$, ya que entonces:

$$\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A(x) = 1 - (1 - \mu_{\overline{A}}(x)) = \mu_{\overline{A}}(x) \tag{2.32}$$

8. Leyes de De Morgan: se garantiza su cumplimiento si la t-norma y s-norma elegidas se derivan la una de la otra. Es decir: $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$.
9. Leyes complementarias: en general no se cumplen. Es quizás la consecuencia más clara de introducir el concepto de borrosidad en los conjuntos.

Se puede comprobar fácilmente que en el caso de que los conjuntos sean clásicos (función de pertenencia restringida a 0 ó 1) las diferencias entre las diversas normas desaparecen, convirtiéndose en los operadores intersección y unión clásicos.

Algunos autores críticos de la Teoría de Conjuntos Borrosos achacan a ésta el hecho de que exista arbitrariedad a la hora de elegir los operadores de unión e intersección. No obstante esto, que parece un inconveniente, puede ser por otro lado una ventaja, ya que nos permite una gran flexibilidad a la hora de abordar distintos problemas que involucren conceptos vagos. Si se precisa mantener ciertas propiedades de los conjuntos clásicos, deben elegirse una t-norma y una t-conorma que lo permitan. Esta elección dará lugar a un tipo u otro de lógica borrosa.

2.1.6 Principio de extensión

Este principio proporciona un mecanismo para calcular los conjuntos borrosos obtenidos por medio de una transformación concreta (no borrosa) de cierto número (N) de conjuntos borrosos. Específicamente, si X_1,X_2,...,X_N son conjuntos borrosos con funciones de pertenencia $\mu_1(x_1)$, $\mu_2(x_2)$, ..., $\mu_N(x_N)$, el nuevo conjunto borroso $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu(y) = \max_{\mathbf{x}=f^{(-1)}(y)} \left[\min_{i=1}^{N} \mu_i(x_i) \right] \tag{2.33}$$

2.1.7 α-cortes

Existe una manera directa de pasar de conjuntos borrosos a conjuntos clásicos mediante los llamados α-cortes [66]. Dado un número $\alpha \in [0,1]$ y un conjunto borroso A, definimos el α-corte de A como el conjunto A_α, cuya función característica se define:

$$\varphi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2.34}$$

En definitiva, el α-corte se compone de aquellos elementos cuyo grado de pertenencia supera o iguala el umbral α.

Hablamos de α-cortes estrictos si:

$$\varphi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_A(x) > \alpha \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2.35}$$

Cualquier conjunto borroso A se puede representar mediante la unión de sus α-cortes de la siguiente manera:

$$\mu_A(x) = \max_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \cdot \varphi_{A_\alpha}(x)] \tag{2.36}$$

Los α-cortes son de especial utilidad en el estudio de propiedades tales como la reflexividad, simetría y transitividad en conjuntos borrosos.

2.1.8 Números borrosos

Un caso particular y de especial interés de los conjuntos borrosos son los llamados *números borrosos*. Surgen éstos como un intento de introducir vaguedad en los números reales.

Un número borroso es un conjunto borroso A definido en la recta real R y que cumple además las siguientes propiedades:

1. Es normal, o lo que es lo mismo, existe al menos un elemento x de R tal que $\mu_A(x) = 1$.
2. Es convexo, lo cual quiere decir que

$$\forall \delta \in [0,1] \;\; \forall x, y \in R$$
$$\mu_A(\delta x + (1-\delta) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

Geométricamente esta propiedad quiere decir que todos los α-cortes de A son intervalos cerrados en R. La función de pertenencia es creciente hasta llegar al punto en que $\mu_A(x) = 1$ y decreciente a partir de él.

3. La función de pertenencia es continua en intervalos.
4. El soporte de A es acotado.

La enorme importancia de los números borrosos estriba en que son muchos los ejemplos prácticos en los que el grado de pertenencia de un determinado elemento del universo $U \subset R$ se puede expresar como función de una característica mensurable del mismo.

Como ejemplo visual, se presenta unas posibles definiciones gráficas de los números borrosos que expresan los predicados "aproximadamente 4" y "aproximadamente 6'. De un modo arbitrario se han escogido funciones de tipo gaussiano y triangular, respectivamente, tal y como se muestran en la Fig. 2.5.

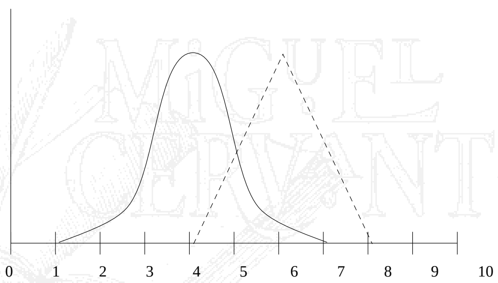

Figura 2.5 Números Borrosos "aproximadamente 4" y "aproximadamente 6"

2.1.9 Modificadores lingüísticos

Un modificador lingüístico, es una operación que modifica el significado de un término, o de manera más general de un conjunto borroso [32, 66, 90]. Por ejemplo, si un conjunto borroso denota *presión débil*, entonces *presión muy débil*, *presión más o menos débil*, *presión extremadamente débil* son ejemplos de modificadores aplicados a este conjunto. Los modificadores se pueden ver como operadores que actúan sobre la función de pertenencia de un conjunto borroso para modificarla. Algunos de estos operadores pueden ser:

1. Concentración:
$$\mu_{con(U)}(x) = [\mu_U(x)]^2 \tag{2.37}$$
2. Dilatación:
$$\mu_{dil(U)}(x) = [\mu_U(x)]^{1/2} \tag{2.38}$$
3. Modificadores artificiales:
$$\begin{aligned} \mu_{plus(U)}(x) &= [\mu_U(x)]^{1.25} \\ \mu_{minus(U)}(x) &= [\mu_U(x)]^{0.75} \end{aligned} \tag{2.39}$$

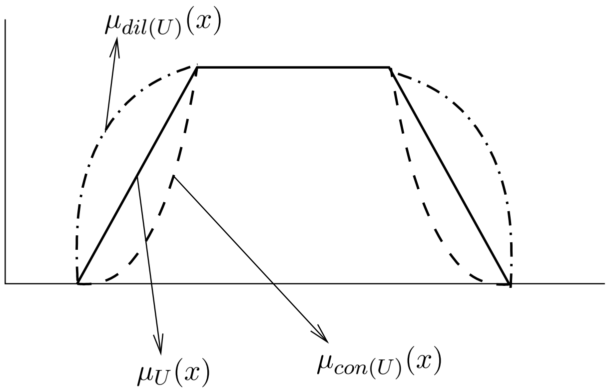

Figura 2.6 Ejemplo de modificadores aplicados sobre un conjunto borroso

En la Fig. 2.6 se muestra gráficamente el efecto de los dos primeros modificadores sobre un conjunto borroso con función de pertenencia trapezoidal. Además de cambiar la forma de las funciones de pertenencia, algunos modificadores también cambian la posición de los conjuntos sobre el eje de ordenadas; por ejemplo el modificador *muy* aplicado sobre el conjunto borroso GRANDE desplaza a esta hacia la derecha (Fig. 2.7).

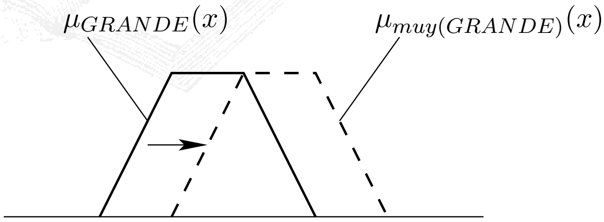

Figura 2.7 Modificador *muy* aplicado sobre el conjunto GRANDE

2.2 LÓGICA BORROSA

La Teoría de Conjuntos Borrosos puede utilizarse para representar expresiones lingüísticas de las que se hace uso para describir conjuntos o algoritmos. Los conjuntos borrosos son capaces de captar por sí mismos la vaguedad lingüística de palabras y frases comúnmente aceptadas, como "flor roja" o "ligero cambio". La habilidad humana de comunicarse mediante definiciones vagas o inciertas es un atributo importante de la inteligencia.

2.2.1 Variables lingüísticas

Una Variable Lingüística es una variable cuyos valores son palabras o sentencias que se enmarcan en un lenguaje predeterminado. Cada una de estas palabras o términos se conoce como *etiqueta lingüística* y se representa por medio de un conjunto borroso definido sobre el universo de discurso de la variable. Por ejemplo, la temperatura del cuerpo humano puede catalogarse como '*baja*', '*normal*', '*alta*' o '*muy alta*'. Cada uno de estos términos es una etiqueta lingüística que puede definirse como un conjunto borroso. Los conjuntos que forman la variable se muestran en la Fig. 2.8.

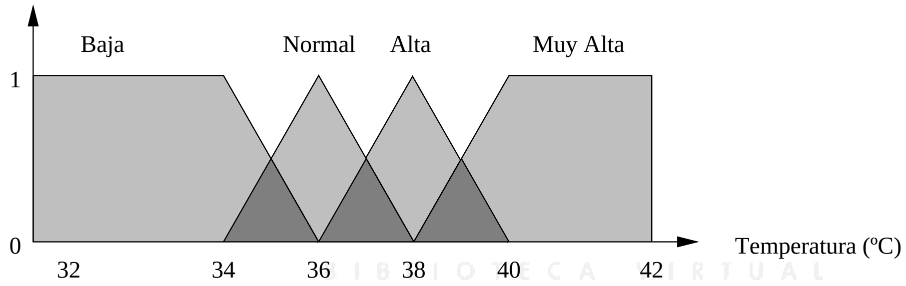

Figura 2.8 Definición de la variable lingüística *Temperatura*

El concepto de variable lingüística se ampliará en el capítulo 3.

2.2.2 Relaciones borrosas: operadores lógicos

Como se ha expuesto en las secciones anteriores, las operaciones unión, intersección y complemento operan todas ellas en un único universo de discurso. Ahora bien, el producto cartesiano permite productos de más de un universo de discurso.

Producto cartesiano

Sean U y V dos universos de discurso cualesquiera. Se define una relación borrosa R entre U y V como un conjunto borroso cuyo universo es el producto cartesiano $U \times V$. Es decir:

$$\begin{array}{l} R = \{((x,y),\mu_R(x,y)) \;\;/\;\; (x,y) \in U \times V\} \\ \mu_R : U \times V \longrightarrow [0,1] \end{array} \tag{2.40}$$

Si $A_1 \subset U$ y $A_2 \subset V$, y si se define el producto cartesiano de A_1 y A_2 como:

$$\mu_{A_1 \times A_2}(x,y) = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(y)) \tag{2.41}$$

entonces, esta función vendría representada como se muestra en la figura 2.9.

Por ejemplo, si $U = V = R$, se puede definir la siguiente relación borrosa que expresa en qué medida los números reales x e y son similares:

$$R = \{((x,y),\mu_R(x,y))|(x,y) \in R^2\} \tag{2.42}$$

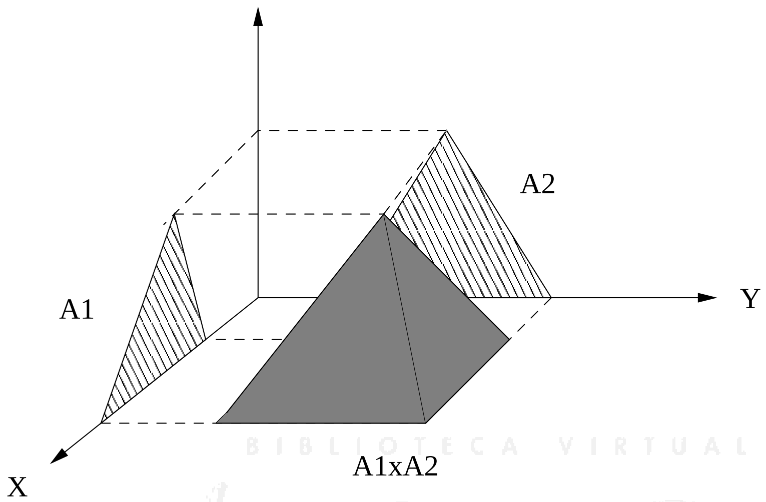

Figura 2.9 Producto cartesiano de dos universos de discurso: X e Y.

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} (1+(x-y)^4)^{-1} & \text{si } |x-y| \leq 5 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2.43}$$

No obstante, la utilidad más destacada de las relaciones borrosas es la de poder actuar como operadores conectivos.

Operador conectivo "AND" ("Y")

Si tenemos dos conjuntos borrosos $A \subset U$ y $B \subset V$, y un par $(x,y) \in U \times V$, el conectivo "AND" que nos indica en qué medida $x \in A$ e $y \in B$ se puede implementar mediante la siguiente relación borrosa:

$$\mu_{AND}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{2.44}$$

Se puede observar que esta noción es muy parecida a la de intersección de conjuntos borrosos. No es exactamente igual, ya que la operación de intersección se define para conjuntos en el mismo universo de discurso. De todos modos, y debido precisamente a esa similitud, es frecuente definir el conectivo "AND" mediante cualquier t-norma y no sólo mediante el empleo del mínimo.

Operador conectivo "OR" ("O")

El conectivo "OR", que da idea de en qué medida $x \in A$ ó $y \in B$, se define habitualmente como la relación

$$\mu_{OR}(x,y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)) \tag{2.45}$$

o bien mediante cualquier otra t-conorma.

Operador implicación "THEN" ("ENTONCES")

De igual forma, se buscan realizaciones para el operador de implicación "THEN" como relaciones borrosas entre antecedentes y consecuentes. En Lógica Borrosa hay muchas maneras con las que puede definirse una implicación; basándose en dichas definiciones, pueden generarse muchas funciones de implicación diferentes en base a t-normas y t-conormas. A continuación expresamos las principales implicaciones borrosas, de las que la implicación de Mamdani (mínimo) y de Larsen (producto) son las de más fácil implementación.

$$
\begin{array}{ll}
\mu_M(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Mamdani} \\
\mu_P(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) & \text{Larsen} \\
\mu_R(x,y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) & \text{Reichenbach} \\
\mu_L(x,y) = \min(1 - \mu_A(x) + \mu_B(y), 1) & \text{Lucasiewick} \\
\mu_W(x,y) = \max(1 - \mu_A(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Willmott} \\
\mu_{KD}(x,y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{Kleene-Dienes} \\
\mu_{RG}(x,y) = \begin{cases} 1 & \forall(x,y)\ \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0 & \forall(x,y)\ \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} & \text{Reschner-Gaines} \\
\mu_G(x,y) = \begin{cases} 1 & \forall(x,y)\ \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ \mu_B(y) & \forall(x,y)\ \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases} & \text{Brouwer-Godel} \\
\mu_{RG}(x,y) = \begin{cases} \min(\mu_A(x)/\mu_B(y), 1) & \forall(x,y)\ \mu_B(y) \neq 0 \\ 1 & \forall(x,y)\ \mu_A(x) = 0 \end{cases} & \text{Goguen}
\end{array}
$$

Cuando μ_A y μ_B no toman nada más que los valores 0 y 1, las definiciones anteriores son compatibles con la implicación de la lógica clásica (correspondiendo 0 al valor de falsedad y 1 al de verdad), salvo en las implicaciones μ_M y μ_P.

2.2.3 Composición de relaciones borrosas: procedimientos de inferencia borrosa

Al contrario que en Lógica Clásica, en Lógica Borrosa el razonamiento no es preciso, sino que éste tiene lugar de una manera aproximada. Esto quiere decir que se puede inferir una conclusión aunque el hecho no verifique la regla plenamente ("Razonamiento Aproximado"). Dicha conclusión se parecerá tanto más a la conclusión formal de la regla original cuanto mayor sea el grado de cumplimiento de la regla por parte del hecho. El razonamiento aproximado se resume generalmente, por extensión del razonamiento clásico, en los esquemas de *modus ponens generalizado* y *modus tollens generalizado*, que veremos a continuación.

Proposiciones borrosas

En una proposición borrosa, a diferencia de lo que ocurre en las proposiciones clásicas, el grado de verdad puede estar en un valor intermedio entre uno y cero. Hay un tipo de proposición borrosa que será particularmente útil, llamada proposición borrosa *incondicional* y *no cualificada.* Se define como:

p: Si X es A entonces Y es B

donde X e Y son variables con valores en los universos U y V respectivamente y A y B son conjuntos borrosos sobre U y V respectivamente. Esta expresión se puede escribir más formalmente por medio de la relación

$$< X, Y > \ \ es\ R \tag{2.46}$$

donde R es un conjunto borroso definido en $U \times V$, y la función de pertenencia de cada una se puede derivar de cada punto $(x, y) \in U \times V$ por medio de una *implicación borrosa*

$$R(x, y) = \mathcal{I}[A(x), B(y)] \tag{2.47}$$

Hay muchas definiciones de la implicación superior. Uno de ellos, es el conocido como la implicación de *Lukasiewicz*, (ver apartado 2.9) definida por:

$$\mathcal{I}[A(x), B(y)] = \min(1, 1 - A(x) + B(y)) \tag{2.48}$$

Modus Ponens Generalizado (MPG)

En este esquema, se expresa una regla, se da un hecho y a partir de ambos se obtiene una conclusión.

Regla:	Si X es A	entonces Y es B
Hecho:	X es A'	
Conclusión:	Y es B'	(MPG)

donde A, B, A' y B' son conjuntos borrosos. La conclusión B' es un conjunto borroso caracterizado por una generalización del Modus Ponens propuesto por Zadeh:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in U}[\min(\mu_{A'}(x), R(x, y))] \tag{2.49}$$

siendo $R(x, y)$ la implicación definida en la ecuación (2.47). De hecho, si el conjunto borroso A' se reduce al elemento x_0, entonces,

$$\mu_{A'} = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x_0 \\ 0 & \text{para } x \neq x_0 \end{cases} \tag{2.50}$$

tomando la implicación $R(x, y)$ por la correspondiente de Mamdani, se obtiene:

$$\mu_{B'}(y) = \min(\mu_A(x_0), \mu_B(y)) \tag{2.51}$$

En suma, el MPG se reduce al esquema de *modus ponens* clásico si $A' = A$ y $B' = B$.

Modus Tollens Generalizado (MTG)

En el Modus Tollens Generalizado (MTG) se cumple que:

Regla:	Si X es A	entonces	Y es B
Hecho:			Y es B'
Conclusión:	X es A'		(MTG)

En este caso la regla composicional de inferencia tiene la forma

$$\mu_{A'}(x) = \max_{y \in V} \min(\mu_{B'}(y), R(x, y)) \tag{2.52}$$

Razonamiento Aproximado Multicondicional

Este razonamiento es una generalización del *modus ponens* a múltiples condiciones [66]:

Regla:	Si X es A_1,	entonces Y es B_1
Regla:	Si X es A_2,	entonces Y es B_2
...	...	...
Regla:	Si X es A_n,	entonces Y es B_n
Hecho:	X es A'	
Conclusión:	Y es B'	

Esta clase de problemas de inferencia se puede manejar también a partir de lo que llamamos el *método de interpolación*, que consiste en dos pasos: (ver figura 2.10)

1. Encontrar el grado de consistencia del antecedente $A_j, j \in \{1, \ldots, n\}$ con el hecho A'

$$dc_j(A') = h(A' \cap A_j) \tag{2.53}$$

siendo $h()$ una medida de la altura del conjunto, que puede calcularse usando una t-conorma

$$dc_j(A') = \bigcup_{x \in U} (A'(x) \bigcap A_j(x)) \tag{2.54}$$

Usando las opraciones estándar resulta

$$dc_j(A') = \max_{x \in U} \min[A'(x), A_j(x)] \tag{2.55}$$

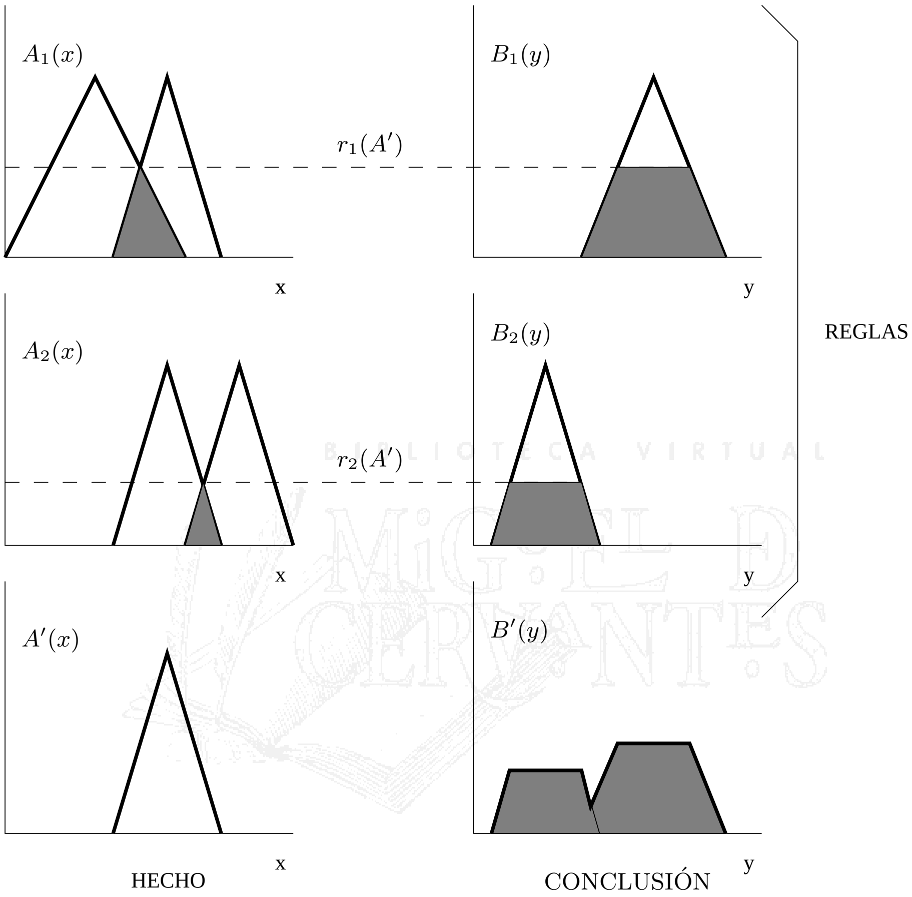

Figura 2.10 Representación Gráfica del *método de interpolación*

2. Calcular la conclusión B' truncando cada conjunto B_j por el valor $r_j(A')$ y tomar la unión de los conjuntos truncados (en caso de que las reglas sean disyuntivas)

$$B'(y) = \bigcup_j (dc_j(A') \bigcap B_j(y)) \ \forall y \in Y \tag{2.56}$$

que usando las operaciones estándar resulta ser

$$B'(y) = \max_j \min[dc_j(A'), B_j(y)] \ \forall y \in Y \tag{2.57}$$

Para el caso de dos entradas, la base de reglas tendrá dos antecedentes, $A_j(x)$ y $B_j(y)$, por lo que el dc debe ser calculado de otra forma; se asumirá que el dc es el mínimo (o de manera más general, otra t-norma) de los dos niveles de activación de cada antecedente por cada entrada. Específicamente

$$dc_j(X,Y) = dc_j(X) \bigcap dc_j(Y) \tag{2.58}$$

que usando el mínimo resulta

$$dc_j(X,Y) = \min(dc_j(X), dc_j(Y))$$

Esta expresión puede extenderse para el caso de múltiples antecedentes, que para una t-norma genérica resulta

$$(dc_i)_j = \bigcap_i (dc_j(Y_i)) \tag{2.59}$$

donde Y_i son las entradas al sistema.

2.2.4 Entradas al sistema y activación de reglas

Cuando en un razonamiento aproximado, como los que se describen anteriormente, la entrada es un valor numérico x_0, la activación de cada conjunto puede hacerse de forma directa como

$$dc_j(x_0) = A_j(x_0)$$

Esto es lo que ocurre en muchas de las aplicaciones que usan razonamientos borrosos, como, por ejemplo, los controladores borrosos.

En cambio, cuando la entrada es un conjunto borroso A', es necesario definir un método para calcular el grado de consistencia de cada antecedente A_j dicha entrada. Dicho método se conoce también como *método de activación de reglas*.

Se pueden considerar varias estrategias para solucionar este problema, basadas en el uso de diversos operadores:

Definición 11 (Método Max-min)
([66, 90]) El grado de consistencia se define, como ya se ha visto en (2.55)

$$dc_j(A') = \max_{x\in X}\{\mu_{A_j \cap A'}\} = \max_{x\in X} \min\{A_j(x), A'(x)\} \tag{2.60}$$

Definición 12 (Método Sum-product)
Kosko [72] propone el siguiente método de activación de reglas:

$$dc_j(A') = \int_{R^n} A'(x)A_j(x)dx \tag{2.61}$$

siendo x una variable continua. Podemos derivar fácilmente su versión discreta [3]:

$$dc_j(A') = \frac{1}{K}\sum_i A_j(x_i)A'(x_i) \tag{2.62}$$

con K un factor de normalización. Este método, de forma opuesta al anterior, toma en cuenta el área encerrada bajo la intersección de ambos conjuntos, no sólo su valor máximo.

Definición 13 (Método Max-product)
[20] Una alternativa a los dos métodos anteriores es este método híbrido, expresado como

$$dc_j(A') = \frac{1}{K} \max\{A_j(x)A'(x)\} \tag{2.63}$$

Este método tiene la ventaja de realizar la intersección mediante un producto, pero no considera todo el área bajo la intersección; el operador *max* reducirá de forma considerable las colas laterales que puedan aparecer en el conjunto borroso de salida.

Definición 14 (Método Sum-min)
Una posibilidad más de calcular la activación de los conjuntos $A_j(x)$ y $A'(x)$ es la siguiente:

$$dc_j(A') = \frac{1}{K} \sum_i \min\{A_j(x_i), A'(x_i)\} \tag{2.64}$$

o para el caso de variable continua:

$$dc_j(A') = \int_{R^n} \min\{A_j(x), A'(x)\}dx \tag{2.65}$$

Pueden definirse otros métodos en función de las normas usadas. En [3] los autores realizan un estudio de la influencia de los métodos de interpolación en el comportamiento de los sistemas borrosos.

2.3 SISTEMAS DE LÓGICA BORROSA

Un sistema de sógica borrosa es la aplicación de la inferencia borrosa a la automatización de procesos. En este capítulo se recogen las principales ideas que subyacen en la aplicación de estas técnicas a sistemas reales.

2.3.1 Tipos de sistemas basados en reglas borrosas

En la literatura especializada se distinguen tres clases de sistemas basados en reglas borrosas (SBRB), de acuerdo con la forma de las reglas y del tipo de entradas y salidas [42]:

Sistemas puros

Estos sistemas tienen como entrada y como salida conjuntos borrosos. Al no realizar ninguna transformación sobre las entradas o sobre las salidas, tienen sólo dos componentes principales: una *base de conocimiento* y un *motor de inferencias* (Fig. 2.11).

Las reglas lingüísticas empleadas son de la forma

$$\text{SI } X_1 \text{ es } A_1 \text{ y } \cdots X_n \text{ es } A_n \text{ ENTONCES } Y \text{ es } B$$

donde X_i e Y son variables lingüísticas, y los A_i y B son etiquetas lingüísticas asociadas a conjuntos borrosos.

Sistemas borrosos tipo Mamdani

Este tipo de sistemas fue propuesto por Mamdani [84], quien fue capaz de traducir las teorías borrosas propuestas por Zadeh en el primer sistema borroso aplicado a un problema de control. Esta clase de sistemas, la más usada dentro de los sistemas borrosos, se conoce también con el nombre de *controladores borrosos*.

Un sistema tipo Mamdani se corresponde con la noción más conocida de *sistema borroso*; está compuesto por una base de conocimiento, un motor de inferencias, y unos interfaces de borrosificación y desborrosificación (Fig. 2.11). Estos sistemas tienen una serie de características interesantes [8]:

- Pueden ser usados en aplicaciones del mundo real, ya que manejan con facilidad entradas y salidas reales.
- Proporcionan un marco natural para la inclusión de conocimiento experto en forma de las reglas lingüísticas.
- Tienen gran libertad a la hora de elegir los interfaces de borrosificación y desborrosificación.

Por el contrario presentan también una serie de limitaciones [42]:

- Falta de flexibilidad en el SBRB debido a la forma tan rígida en la que se particionan los espacios de entrada y salida.
- No existe una distinción clara entre el conocimiento experto y la definición de las variables lingüísticas incluidas en las reglas borrosas.
- Cuando las variables de entrada al sistema dependen unas de otras, es muy complicado obtener una partición borrosa adecuada de los espacios de entrada.
- El tamaño de la base de conocimiento depende directamente del número de variables y términos lingüísticos que existan en el sistema.

Las reglas que manejan esta clase de sistemas son de la forma

$$\text{SI } X_1 \text{ es } A_1 \text{ y } \cdots X_n \text{ es } A_n \text{ ENTONCES } Y \text{ es } B$$

donde las entradas X_i y la salida Y son ahora números (no borrosos), en lugar de términos lingüísticos (como en el caso anterior), y por lo tanto, los A_i y B son conjuntos borrosos sin interpretación directa, en lugar de etiquetas lingüísticas.

Sistemas borrosos tipo Takagi-Sugeno-Kang

En lugar de trabajar con reglas lingüísticas como las de la sección anterior, Takagi, Sugeno y Kang [117, 121] propusieron un nuevo modelo basado en reglas donde el antecedente estaba compuesto de variables lingüísticas y el consecuente se representaba como una función de las variables de entrada. La forma más habitual de esta clase de reglas es la siguiente:

$$\text{SI } X_1 \text{ es } A_1 \text{ y } \cdots X_n \text{ es } A_n \text{ ENTONCES } Y = p_1 \cdot X_1 + \cdots p_n \cdot X_n + p_0$$

siendo X_i las variables de entrada, Y la variable de salida, y p_i parámetros reales. Esta clase de reglas se conocen como reglas TSK en referencia a sus creadores.

La salida de un sistema borroso TSK que usa una base de conocimiento con m reglas se obtiene como la media ponderada de las salidas individuales proporcionadas por cada regla, Y_i, $(i = 1, \cdots, m)$, como sigue

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} h_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i}$$

siendo $h_i = T(A_1^i(x_1), \cdots, A_n^i(x_n))$ el grado de emparejamiento entre la parte antecedente de la regla i y las entradas actuales al sistema $x = (x_1, \cdots, x_n)$. T es un operador de conjunción que se modela mediante una t-norma.

Esta clase de sistemas no han sido utilizados en los desarrollos posteriores.

2.3.2 Elementos

En la figura 2.11 aparecen los elementos principales de un Sistema de Lógica Borrosa (SLB). Se ha escogido como modelo un sistema tipo Mamdani por ser éste el más usado en la literatura. Contiene cuatro componentes fundamentales [90]:

Interfaz de Borrosificación que realiza un escalado de los valores de las entradas para adecuarlos a los valores típicos para los que se define el sistema, y una "borrosificación" que convierte los datos de entrada en valores lingüísticos adecuados para la manipulación de éstos como entidades borrosas.

Base de Conocimiento formada por una "base de datos", que recoge la definición de las funciones de pertenencia de las entradas y el sistema, y una "base de reglas", que caracteriza y resume la política y objetivos del control de un experto por medio de un conjunto de reglas lingüísticas de control.

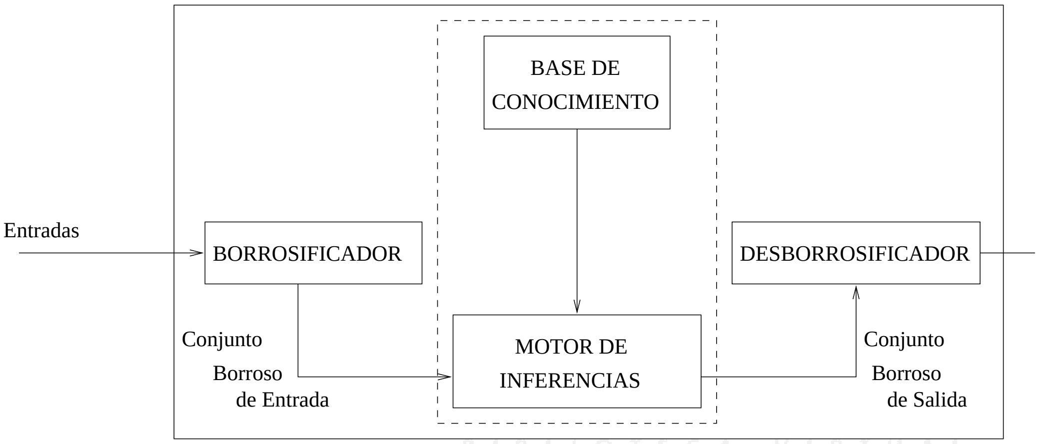

Figura 2.11 Sistema de Lógica Borrosa

Motor de Inferencias que inferirá las acciones del sistema empleando alguna representación de la implicación borrosa, así como de los procedimientos de inferencia en Lógica Borrosa.

Interfaz de Desborrosificación (o de concreción [93]) que convertirá la acción "borrosa" actualmente inferida en una acción concreta susceptible de aplicación sobre el proceso, y realizará un escalado para adecuar los rangos de salida para los que se ha definido el sistema con las entradas del proceso.

2.3.3 Base de conocimiento

Base de reglas

Consideremos como ejemplo ilustrativo un problema genérico que puede ser resuelto en términos de razonamiento aproximado por un ser humano experto en la materia, generalmente siguiendo el esquema de *modus ponens generalizado*. Esto quiere decir que el experto es capaz, mediante un conjunto de reglas o pautas de actuación que constituyen su experiencia sobre el tema de elaborar unas conclusiones o consecuentes a partir de unos hechos observados o antecedentes. El experto podrá transmitir sus conocimientos, al menos parcialmente, mediante un conjunto de N reglas del tipo *si-entonces*, con antecedentes relacionados por el conectivo "Y" en la mayoría de los casos (ver apartado 2.2.2 y siguientes).

La experiencia del ser humano, recogida y almacenada de esta manera, es lo que podemos denominar *base de reglas* (o *base de conocimiento*) por similitud con los métodos de trabajo y la terminología propios de los Sistemas Expertos.

Existen varios modos de derivación de las reglas, siendo éste el punto fuerte de numerosas investigaciones actualmente. Cabe destacar:

- Basados en los conocimientos de un experto, generalmente a través de una verbalización introspectivo de ésta, o a partir de cuestionarios cuidadosamente organizados.
- Basados en las acciones de control de un operador, en función de los datos de entrada-salida observados.
- Basados en un modelo borroso del proceso.
- Basados en aprendizaje (controladores auto-organizados).

Funciones de pertenencia. Base de datos

Los conceptos asociados con la Base de Datos se usan para caracterizar las reglas borrosas y la manipulación de los datos en un sistema borroso. Estos conceptos son definidos subjetivamente y están basados en la experiencia y juicio de un experto sobre el proceso. Algunos de estos aspectos serían la cuantificación y normalización de los universos de discurso, número de conjuntos borrosos o categorías lingüísticas de entradas y control, y la elección de las funciones de pertenencia asociadas a éstas últimas.

La elección de niveles de cuantificación tiene una influencia esencial en la precisión y "finura" del sistema obtenido. El número de categorías lingüísticas determina la granularidad del sistema final.

Existen dos métodos para definir conjuntos borrosos (mediante sus funciones de pertenencia), dependiendo de si los universos de discurso son discretos o continuos:

- Definición numérica: En el caso de universos discretos, la función de pertenencia de un conjunto borroso se representa como un vector de números cuya dimensión depende del grado de discretización.
- Definición funcional: En el caso de universos continuos, las funciones de pertenencia se expresan por medio de funciones regulares, típicamente triangulares o trapezoidales (sección 2.1.2).

La elección de la forma de las funciones de pertenencia se basa en criterios subjetivos o característicos de cada proceso en cuestión. Por ejemplo, si los datos medibles van a estar afectados por ruido, las funciones de pertenencia deberían ser suficientemente anchas para reducir la sensibilidad del sistema frente a éstos.

2.3.4 Motor de inferencias. Inferencia borrosa

El motor de inferencias representa el núcleo del SBRB, y agrupa toda la lógica de inferencia borrosa del sistema, de barrido de las reglas durante ésta, elección refinada de reglas a utilizar, etc.

La inferencia borrosa es el proceso mediante el cual se obtiene como consecuente un conjunto borroso a partir de unos antecedentes también borrosos. Hace uso de lo visto en la sección 2.2.3.

2.3.5 Borrosificación y desborrosificación

En mucho casos, especialmente dentro de la literatura de control, las entradas a un sistema borroso no son conjuntos borrosos sino valores numéricos concretos. Por eso es necesario establecer algún tipo de interfaz entre estos valores numéricos y el motor de inferencia borrosa. Por un lado habrá que elaborar conjuntos borrosos a partir de las entradas no borrosas (borrosificación) y por otro se habrá que calcular un valor numérico de salida a partir del conjunto borroso obtenido en el proceso de inferencia (desborrosificación).

Borrosificación

La primera parte del problema tiene una solución muy sencilla. Si x_0 es el valor concreto de una entrada del sistema borroso, parece lógico definir el correspondiente conjunto borroso de entrada mediante la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.66}$$

Desborrosificación (concreción)

Para calcular la señal de salida que se debe aplicar al proceso se puede recurrir a distintos métodos. Desafortunadamente, no existe ningún procedimiento sistemático para la elección de la estrategia de desborrosificación, siendo las más comúnmente usadas en la actualidad las siguientes:

1. Método de máxima pertenencia: el valor de salida es aquél cuyo grado de pertenencia al conjunto de salida $D(y)$ inferido sea máximo. Es decir:

$$\max_{y \in D(y)} \mu_D(y) = \mu_D(y_0) \tag{2.67}$$

2. Método del centro de gravedad (o centroide). Es sin duda el más usado de todos los métodos, ya que proporciona variaciones suaves y continuas de los valores de salida. Ésta se calcula como el centro de gravedad de la función de pertenencia del conjunto de salida $D(y)$. Esto es:

$$y_0 = \frac{\int y \mu_D(y) dy}{\int \mu_D(y) dy} \tag{2.68}$$

3. Método del máximo indexado: Este método calcula el centro de gravedad del subconjunto borroso del consecuente inferido, correspondiente a los puntos cuyo valor de pertenencia al consecuente es superior a un umbral dado.

Existen otros muchos métodos de desborrosificación [66, 90] siendo éste un tema de constante estudio en la literatura.

2.3.6 Sistemas Borrosos Aditivos

Kosko [70, 72] propone lo que él llama *Sistemas Borrosos Aditivos*. Un caso particular de estos sistemas es el llamado *modelo aditivo estándar* (en inglés *standard additive model*, SAM), cuyo diagrama de bloques se muestra en la Fig. 2.12.

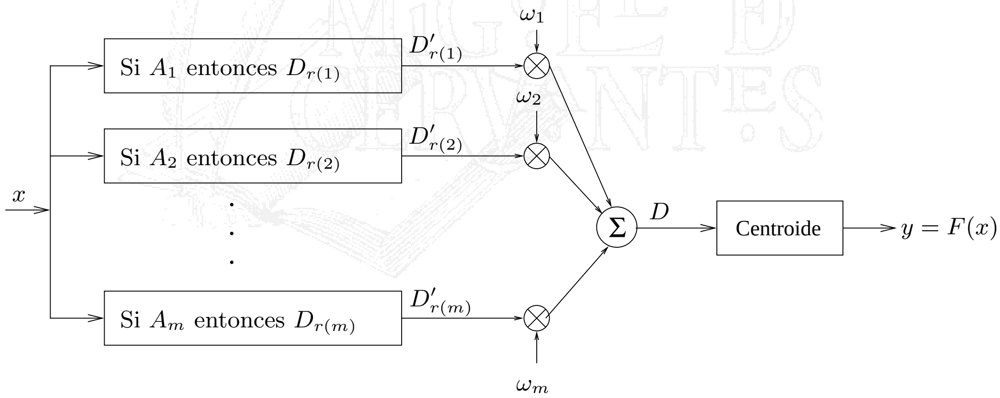

Figura 2.12 Diagrama de bloques de un *modelo aditivo estándar*

A partir de una entrada no borrosa x, el sistema dispara la parte *si* de las reglas, activando los conjuntos $A_{p(j)}$ hasta un cierto nivel dado por el coeficiente de activación $CA_j = A_{p(j)}(x)$. La parte *entonces* de las reglas, correspondiente a los conjuntos de salida $D_{r(j)}$ (siendo $p(j)$ y $r(j)$ funciones de indexado) se escala de acuerdo a este nivel. El escalado se realiza mediante el operador producto. Cada regla proporciona como salida un nuevo conjunto $D'_{r(j)}$, tal que

$$D'_{r(j)} = D_{r(j)} A_{p(j)}(x) \tag{2.69}$$

Estos conjuntos se escalan por un coeficiente ω_j y se suman para obtener el conjunto resultado D. Para obtener el valor de salida se suele usar el centroide de dicho conjunto.

$$F(x) = \text{centroide}(D) = \text{centroide}\left(\sum_j \omega_j D_{r(j)} A_j(x)\right) \tag{2.70}$$

En caso de tener múltiples antecedentes, y por lo tanto múltiples entradas x_1, x_2,... x_L en reglas de la forma

Si x_1 es $A_{p_1(j)}$ y x_2 es $A_{p_2(j)}$ y ... y x_L es $A_{p_L(j)}$ entonces Y es $D_{r(j)}$

el nivel de activación de la regla se calcula como el producto de los niveles individuales:

$$\prod_{i=1}^{L}(CA_i)_j = \prod_{i=1}^{L} A_{p_i(j)}(x_i) \tag{2.71}$$

$$D'_{r(j)} = D_{r(j)}\left[\prod_{i=1}^{L}(CA_i)_j\right] \tag{2.72}$$

Los niveles de activación $(CA_i)_j$ son el equivalente en operativa SAM de los grados de consistencia dc_j del caso general (secciones 2.2.3 y 2.2.4).

Kosko defiende esta arquitectura alegando distintas razones. Las más importantes son:

- El cálculo computacional que requiere esta arquitectura es pequeña. Se debe al hecho de que algunas de las variables intermedias que se necesitan para calcular la solución final pueden ser precalculadas y almacenadas. El centroide de salida, por ejemplo, puede escribirse:

$$F(x) = \text{centroide}(D) = \frac{\int yD(y)dy}{\int D(y)dy} \tag{2.73}$$

$$= \frac{\sum_j \omega_j A_j(x) V_j c_j}{\sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j(x) V_j} \tag{2.74}$$

  donde los parámetros V_j y c_j son, respectivamente, el *hipervolumen* encerrado por la función de pertenencia D_j y su centroide.

  Como se puede deducir de la expresión, tanto los volúmenes V_j como los centroides c_j pueden ser precalculados. El cálculo real sólo será de los $A_j(x)$ y el uso de la expresión (2.74).

- Kosko propone diferentes operaciones borrosas a las propuestas por otros autores [66] sobre conjuntos borrosos. Específicamente, si se tiene en cuenta el método de *interpolación* (ver Fig. 2.10, en el apartado 2.2.3):

  1. Ya que las entradas que él propone son numéricas (no borrosas) no da a lugar usar la expresión allí apuntada, como un nivel. Los niveles se obtienen directamente de la función de pertenencia de la parte *si* de las reglas en el punto *x*.

     En el caso de que la entrada sea un vector (es decir, en el caso de que existan varias condiciones *si* en las reglas), Kosko sugiere la multiplicación de los niveles de disparo individuales, tal y como se muestra en la ecuación (2.71), en oposición al operador *min*. La razón para esto es que el multiplicador reduce el nivel de proposiciones en los que los *hechos* no coinciden con la parte *si* de la reglas. Sin embargo, el operador *min* no puede realizar esto.

Si las entradas son borrosas, los niveles se calculan como

$$A_j(A) = A_j \circ A = \int_{R^n} A(x)A_j(x)dx \tag{2.75}$$

2. Respecto a la combinación aditiva de la parte *entonces* de las reglas, Kosko dice que el operador *max* tiende a crear funciones de pertenencia que se aproximan más a pulsos rectangulares cuanto más reglas se combinan.

   Por otro lado, el operador *suma* tiene la tendencia a crear curvas con forma de campana, lo que sugiere la posibilidad de la existencia de un teorema del límite similar al teorema del límite central.