APÉNDICE

El Análisis por Envoltura de Datos

El DEA se ha convertido, desde los principios de su desarrollo (1978), en una de las herramientas centrales disponibles a los *managment scientist* para el análisis de los objetivos de la organización. Las primeras aplicaciones del DEA se produjeron en las instituciones estadounidenses, hoy en día, existen centros de investigación distribuidos a lo largo de todo el mundo, los cuales han sido el origen de muchas nuevas ideas así como también nuevas aplicaciones. Esta técnica se ha utilizado con gran profusión en el sector público, como es el caso particular de los centros de educación y hospitales, también se ha utilizado en sectores privados, como el sector bancario y el sector eléctrico, Ejemplos de estos últimos son los trabajos de Miliotis(1992), Hjalmarsson (1992), Agrell (1998), Forsund(1998) y Lo Feng-Yu (2001).

La productividad de una/s organización/es es útil cuando el ente que se estudia tiene capacidad de decidir acerca de la cantidad de cada uno de los recursos que están siendo utilizados y los productos y/o servicios que se generan. Por ello, a la unidad productiva se le denomina decisoria, en la literatura anglosajona Decision Making Unit. Respecto a la consideración de las distintas DMU's estas pueden ser entidades financieras, departamentos de almacenes y supermercados, y extenderlo a fabricantes de coches, hospitales, colegios, bibliotecas públicas y más entidades. En la ingeniería, se pueden considerar DMU´s por ejemplo los aviones o sus componentes como en las máquinas de propulsión. Con el objetivo de asegurar las comparaciones relativas, cada DMU integrante de un grupo de DMU's es comparada con otra unidad de decisión con el propósito de tener un cierto grado de decisión.

Como su propio nombre indica, el Análisis Envolvente de Datos supone la identificación de una frontera eficiente que envuelve o encierra al conjunto de observaciones de la muestra objeto de estudio. El DEA es una técnica que evalúa la eficiencia de unidades de decisión, DMU's, siendo los elementos utilizados para la comparación, los recursos de entrada y los recursos de salida, también denominados en términos anglosajones inputs y outputs respectivamente.

Si bien, se han aplicado distintos modelos de DEA para tratar problemas de gestión o producción, todos ellos coinciden en que están orientados hacia los conceptos frontera, asociados con localizaciones eficientes e ineficientes de las unidades de decisión responsables de convertir múltiples inputs en múltiples outputs. El método DEA está orientado hacia la productividad individual y la identificación de relaciones extremas entre input y output para las diferentes unidades de decisión mientras que las regresiones estadísticas, índices de productividad, están orientados hacia la producción media o output medio para un input dado.

El análisis se realizará siempre y cuando las unidades de decisión consideradas consuman el mismo tipo de recursos para la obtención del mismo tipo de productos y/o servicios. La técnica DEA está basada en la noción económica de la optimalidad de Pareto y realiza una comparación transversal de las diferentes entradas y salidas de cada DMU con todas las demás. Entre las características de esta técnica pueden destacarse

- Flexibilidad, puesto que no requiere especificar una forma funcional de antemano.
- Capacidad para trabajar con múltiples factores, a diferencia del análisis tradicional de ratios que considera sólo dos factores de la actividad representados en el numerador y denominador.
- No se basa en la naturaleza estocástica de los datos observados.

El procedimiento DEA se puede enfocar bien hacia el aumento de los outputs o bien a la conservación de los inputs. En el contexto de los incrementos de outputs el objetivo es maximizar la cantidad de outputs obtenido, dado un nivel de inputs, denominándose *orientación de salida*. Así, una unidad es considerada técnicamente ineficiente si alguna otra unidad, o combinación convexa de unidades, no puede utilizar ningún input y producir al menos la misma cantidad de outputs[16]. El contexto de mantener el nivel de recursos o inputs, se denomina *orientación de entrada*, y el objetivo es minimizar el consumo de recursos, dado un nivel de productos. Dada una DMU, se dice que es técnicamente ineficiente si alguna otra unidad, o alguna combinación lineal de otras unidades, produce al menos la misma cantidad de outputs y utiliza menos inputs[17]. Por otra parte, se dice que una unidad es técnicamente eficiente, con orientación de entrada, si produce los mismos outputs utilizando menos inputs.

En los últimos años se han visto una gran variedad de aplicaciones de DEA, utilizándose en la evaluación de los objetivos de muchos tipos de entidades las cuales desarrollan distintas actividades en diversos países.

Como ya se ha comentado, en DEA, los organismos objeto de estudio son denominados un DMU. La definición de DMU es bastante amplia para permitir flexibilidad en su utilización para el mayor número de aplicaciones.

Los dos modelos que frecuentemente se asocian a la metodología DEA son el modelo de CCR, desarrollado por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978, y el modelo BCC, desarrollado por Banker, Charnes y Cooper en 1984. El modelo CCR produce una frontera eficiente a retornos de escala constantes. Las eficiencias relativas calculadas en el modelo CCR son, en términos generales, una puntuación de su eficiencia. Así, la puntuación de la eficiencia de todas las DMU´s en los modelos DEA estarán comprendidas entre los valores 0 y 1. Por otra parte, el modelo BCC produce una frontera eficiente a retornos de escala variables y evalúa tanto la eficiencia técnica como la eficiencia de escala. A continuación se tratará de exponer la metodología de ambos modelos.

A continuación se va a tratar uno de los modelos más básicos en DEA, el modelo CCR el cual para cada DMU, crea entradas ($x_0 \in \Re^m$) y salidas

[16] al menos una unidad de output.
[17] al menos una unidad de input.

($y_0 \in \Re^s$) virtuales a través de los pesos asociados ($v \in \Re^m$, $u \in \Re^s$), de momento desconocidos, a cada uno de estas entradas y salidas:

$$\text{Entradas Virtuales} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = v_1 x_{10} + ... + v_m x_{m0}$$

$$\text{Salidas Virtuales} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} = u_1 y_{10} + ... + u_s y_{s0}$$

Los pesos óptimos pueden y generalmente cambiaran entre las distintas DMU´s consideradas.

Suponer que se tienen n DMU's: DMU_1, DMU_2...,DMU_n. Los elementos considerados entradas y salidas de las DMU´s $j=1,2,..., n$ son seleccionados de la forma que se verá a continuación:

- Los valores para cada entrada y salida tienen que ser positivos para todas las DMU's.
- Los elementos (entradas, salidas y la elección de DMU´s) deberían reflejar un interés de análisis o de controlar los componentes que formaran parte de las relaciones de eficiencia de las DMU´s.
- La medida de las unidades de las distintas entradas y salidas no necesita ser congruente. Algunos pueden tener como medida el número de personas, superficie de espacio, unidades monetarias...

Consideremos un modelo simple con inputs y outputs para cada DMU $j=1, ..., n$, como (X_i, Y_j), donde $X_j=(x_{1j},...,x_{ij},...,x_{mj})$ es un vector de inputs observados e $Y_j=(y_{1j},...,y_{rj},...,y_{sj})$ un vector de outputs observados de las DMU_j.

La relación existente entre los diferentes inputs y outputs en cada una de las unidades de decisión se representa en la siguiente figura:

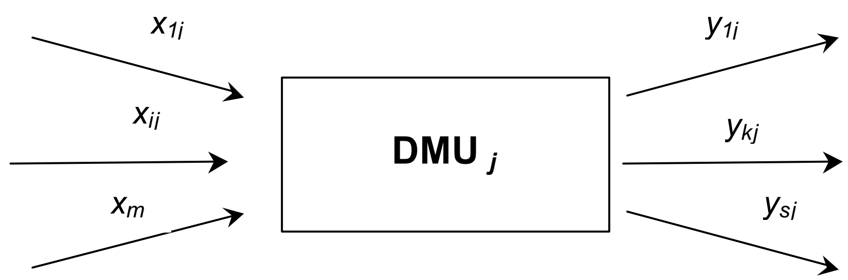


Figura.A.V.1.Flujos de Entrada y Salida de la *j*-ésima Unidad de Decisión. Elaboración. Propia.

La técnica DEA fue desarrollada como una extensión del clásico modelo *ratio de eficiencia*, ecuación 22, el cual maximizaba para cada DMU la suma ponderada de los outputs entre la suma ponderada de los inputs, donde los pesos eran determinados por el modelo. Así, este problema de programación fraccionada es transformado en un problema de programación lineal, ver ecuación 23. Y aplicando la teoría de dualidad a dicho problema de programación lineal se obtiene su expresión dual (24).

La formulación de dicho modelo en forma de programación fraccionada, se denomina modelo ratio y su expresión es la siguiente:

$$max_{(u,v)} \quad h_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} \tag{22}$$

Sujeto a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1; \quad j = 1,\ldots,n$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots, m; \quad r = 1,\ldots,s$$

Los valores conocidos observados de las entradas y salidas de las *j* DMU´s de la muestra considerada; x_{r0} *e* y_{r0} los valores de la DMU unidad de decisión que va a ser evaluada en una prueba. De forma que las variables de ponderación o variables del modelo serían v_i^* y u_r^*, los cuales generarán el óptimo h_0^*=1, sólo si la unidad evaluada es eficiente. De esta forma, la función objetivo siempre tomará valores entre 0 y 1, para las distintas unidades estudiadas.

Por ejemplo, supóngase una función de producción que relaciona el output (*Y*) y dos inputs: el trabajo (*L*) y el capital (*K*). La función *Y* (*K,L*) muestra retornos a escala constantes (CRS). Ahora se divide los inputs entre el output, obteniendo un cociente, *L/Y*, representado a través del eje de abscisa y *K/L* representado en el eje de ordenadas. En tal espacio se dibuja una isocuanta envolvente de todas las empresas envolventes (figura A.V.2). El punto B representa una empresa ineficiente mientras que los puntos A, D, E son eficientes. Farell definió la eficiencia técnica a través del cociente: TE_{CRS}= OC/OB, que alcanzará valores entre 0 y 1. Una empresa es eficiente[18] si la eficiencia técnica es igual a la unidad.

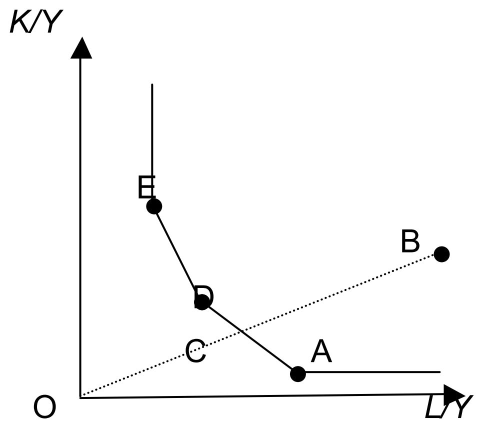


Figura A.V.2. Una medida de la eficiencia técnica: TE_{CRS}= OC/OB.
Fuente. R¹ czka, J.(2001)
Elaboración.Propia

Para poder resolver el modelo anterior, ha de expresarse en forma de problema lineal, para ello se fija el denominador a la unidad, y la expresión resulta en función del numerador, el cual tendrá que maximizarse, tal como se refleja en la expresión:

$$\max \; h_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \tag{23}$$

Sujeto a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \quad , j= 1,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon$$

dónde $\varepsilon>0$ es una cantidad pequeña no arquimediana, y por tanto en las restricciones donde aparece los pesos nunca pueden ser nulos. Una vez resueltos los n problemas propuestos, se obtendrá un subconjunto C formado por las unidades DMU_j que han resultado ser eficientes al resolver el modelo dado, siendo h_0=1. Siendo la DMU que no cumple esta condición ineficiente respecto al subconjunto C definido, y su eficiencia será valorada como h_0<1 y su ineficiencia, (1- h_0).

Además, (v^*, u^*) son el conjunto de pesos más favorables para la DMU evaluada, DMU_0, en el sentido de maximizar h_0. Siendo:

v_i^* el peso óptimo para la *i-ésima* entrada, expresando su grado de importancia y contribución a h_0.

u_r^* el peso óptimo para la *r-ésima* salida, expresando su grado de importancia y contribución a h_0.

Sin embargo, es más frecuente utilizar las expresiones del problema dual para analizar los resultados obtenidos. La función objetivo de este modelo intenta encontrar un valor mínimo para una cantidad de factor w_0^*. Además, la función objetivo busca los mayores valores que pueden alcanzar los inputs y outputs, es decir, encuentra el punto de referencia en la función de producción empírica que caracteriza a la peor DMU. A continuación se expresa (24) modelo dual, conocido como *forma envolvente*:

$$Min\, w_0 - \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{r=1}^{s} s_r\right] \qquad (24)$$

Sujeto a:

$$0 = w_0 x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - z_i \ , \ i=1,..., m$$

$$y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r, \quad r= 1,...,s$$

$$\lambda_j, z_i, s_r \geq 0, \quad \forall\, i,\, j,\, r$$

Las n variables λ_j son las correpondientes a las n primeras restricciones del problema primal, w_0, la variable correspondiente a la restricción restante, y z_i y s_r, que denominamos variables de holgura, son las correspodientes a las s+m cotas existentes. La resolución del modelo consta de dos etapas o fases.
En la primera fase se resuelve el siguiente modelo:

$$Min\; w_0$$

Sujeto a:

$$0 = w_0 x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - z_i \ , \ i=1,..., m$$

$$y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r, \quad r= 1,...,s$$

$$\lambda_j, z_i, s_r \geq 0, \quad \forall\, i,\, j,\, r \ ,$$

$$w_0 \text{ libre}$$

Una vez resuelto la primera fase, obteniendo el valor de w_0^* se resuelve la segunda fase:

$$Min\ \ \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{r=1}^{s} s_r\right]$$

Sujeto a:

$$0 = w_0^* x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - z_i\ ,\ i=1,\dots, m$$

$$y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r,\quad r= 1,\dots,s$$

$$\lambda_j, z_i, s_r \geq 0,\quad \forall\ i, j, r$$

Las funciones objetivo de ambos problemas coinciden en el óptimo y por tanto se tiene que:

$$h_0^* = w_0^* - \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m} z_i^* + \sum_{r=1}^{s} s_r^*\right] = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}$$

Así, pues, las soluciones obtenidas del modelo son respectivamente w_0^*, z_i^*, s_r^* y λ_j^*.

donde

w_0^* es la proporción de entradas actuales que deben utilizarse para alcanzar la eficiencia.

z_i^* es el vector columna de las variables de holgura correspondientes a la desigualdades de las entradas o inputs, sus unidades estarán expresadas según las variables de entrada.

s_r^* es el vector columna de las variables de holgura correspondientes a las desigualdades de las salidas u outputs, sus unidades estarán expresadas según sus variables de salida.

λ_j^* es un vector columna cuyas componentes son multiplicadores adimensionales, miden la proximidad de la proyección resultante de cada DMU con las unidades eficientes de las que es combinación lineal.

De forma que si en la unidad evaluada w_0^* toma el valor 1 y las variables de holgura z_i^* y s_r^* son cero entonces dicha unidad es eficiente. No resultando eficiente si al menos una variable de holgura, bien z_i^*, bien s_r^*, es distinta de cero. La variable épsilon asigna un valor por cada nivel de ineficiencia residual o estimada a través de las variables de holgura.

Así, los valores de los inputs y outputs que definirán los niveles de eficiencia serán:

$$\hat{x}_{i0} = w_0^* x_{i0} - z_i^* \tag{25}$$

Expresándose mediante $\hat{x}_{i0}$ el nivel de inputs que deberá conseguir la unidad evaluada para trabajar en eficiencia. El ahorro equiproporcional de cada uno de los inputs empleados por la unidad evaluada sería $1-w_0^*$, tal como se expresa a continuación:

$$\Delta x_0 = x_0 - \left(w_0^* x_0 - z_i^*\right) = (1-w_0^*)x_0 + z_i^*$$

La ecuación 26 expresa el nivel de outputs dado para la anterior combinación de inputs de la unidad evaluada.

$$\hat{y}_{r0} = y_{r0} + s_r^* \tag{26}$$

Una vez fijado la cantidad mínima de input/s que maximiza el output, $\hat{x}_{i0}$, puede ocurrir que el output se incremente (en este caso habría ampliaciones de carácter rectangular). Este incremento sería de s_r^*.

Hasta ahora el modelo DEA presentado tiene una *orientación bien hacia las entradas*, también denominado *modelo CCR- Input*, siendo también posible estudiar su orientación hacia las salidas, a través del *modelo CCR-Output*. Es decir, el modelo CCR puede tener como objetivo maximizar las salidas permaneciendo constantes las entradas, que va a ser el modelo que se va a expresar a continuación :

$$Min\ h_0 = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}$$

Sujeto a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0\ ,\ j=1,\ 2,...,\ n$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_r y_{r0} = 1$$

$$v_i\ ,\ u_r \geq \varepsilon$$

Se advierten las mismas consideraciones realizadas en el modelo anterior, *modelo CCR-Input*. Así, el problema dual en el *modelo CCR-Output* se obtiene de forma similar:

$$Max \quad t_0 + \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{r=1}^{s} s_r \right]$$

Sujeto a:

$$0 = x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j - z_i\ , \qquad i=1,...,\ m$$

$$t_0 y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j - s_r\ , \quad r = 1,...,s,$$

$$\lambda_j, z_i, s_r \geq 0, \quad \forall\ i,\ j,\ r$$

A continuación se ilustra el uso del modelo CCR a través de un ejemplo a pequeña escala.

Ejemplo ilustrativo

La tabla A.V.1 muestra la relación entre la cantidad de input empleado y el output obtenido de 5 empresas pertenecientes a un mismo sector. Se desea conocer si se está utilizando, para cada una de las empresas, de forma eficiente el nivel de input, sabiendo que todas las empresas tienen la misma capacidad de producción.

Tabla.A.V.1. Datos problema CCR-Input.

Empresa	Input	Output
1	8	5
2	5	5
3	6	3
4	7	2
5	5	3

Elaboración. Propia.

Es posible evaluar la eficiencia de la empresa 1, resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Max } h_0 = 5u$$

$$\text{s.a: } 8v = 1$$

$$5u \leq 8v \ (1) \qquad 2u \leq 7v \ (4)$$

$$5u \leq 5v \ (2) \qquad 3u \leq 5v \ (5)$$

$$3u \leq 6v \ (3)$$

$$u, v \geq \varepsilon$$

La solución óptima del problema viene dado por $v^* = 0{,}125$, $u^* = 0{,}2$, $h_0^* = 0{,}6250$. Resultando ser el nivel de eficiencia de 1 del 62,50%. El conjunto de empresas de referencia para la empresa 1 resulta ser la empresa 2 para $v^* = 0{,}125$, $u^* = 0{,}2$. Además los niveles de input y de output de la empresa 2 son empleados para la caracterización de la empresa 1 y es calificada como empresa ineficiente incluso con los mejores pesos que los datos admiten para 1.

Se procedería de forma similar con las cuatro empresas restantes y se obtendrían los resultados de la tabla A.V.2.

Tabla. A. V. 2. Resultados ejemplo CCR-Input.

Empresa	Eficiencia(%)	Conjunto de Referencia
1	62,50%	2
2	100,00%	2
3	50,00%	2
4	28,57%	2
5	60,00%	2

Elaboración. Propia.

La única empresa que trabaja en eficiencia y que pertenece al conjunto de referencia es la empresa 2, tal como se puede observar en la figura A.V.3, la cual representa la situación geométricamente. La frontera eficiente está representada por la recta que pasa solamente por el punto 2. Los índices de eficiencia, h_0^*, de la tabla A.V.2 destacan la necesidad de trasladar cada empresa a la frontera eficiente. Por ejemplo, el valor de $h_0^* = 0{,}6250$ aplicado a la empresa 1 indica que tendrá que reducir en un (1-0,6250)100% su nivel de input para trabajar dentro de la frontera eficiente. Igualmente la empresa 3 bastará con que emplee 0,5*6=3 unidades de input para situarse en la frontera eficiente, reduciendo un 50% su nivel actual de output. Igual interpretación merecen el resto de las empresas consideradas. Si se analizan el resto de empresas, se concluiría que la empresa 1 tiene que utilizar 5 (8x0,6250) unidades de input, por lo tanto tendría que reducir en tres unidades su nivel actual de input. Por último, la empresas 4 y 5 tendrían que aplicar reducciones de 5 y 2 unidades de input, respectivamente.

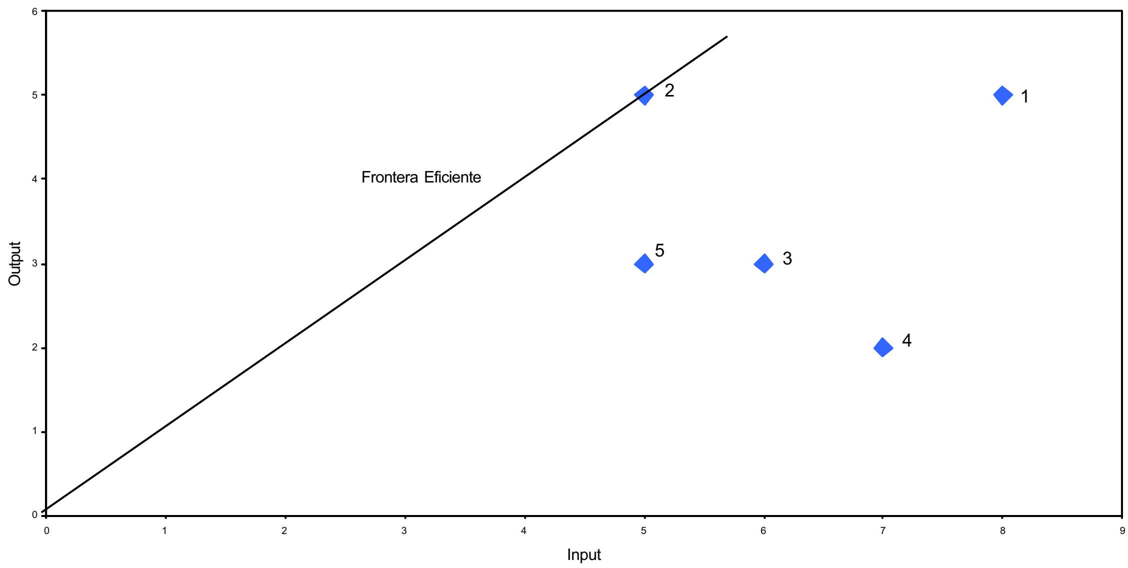


Figura A.V. 3.Situación geométrica de las empresas. CCR-Input.
Elaboración. Propia

Los resultados del problema obtenidos a través del paquete informático EMS se exponen en la figura A.V.4, donde todas las columnas, a excepción de la primera, representan variables del problema dual, cuyo significado es el siguiente:

DMU :hace referencia a la empresa que se está evaluando.

Score :es el índice de eficiencia, h_0^* o w_0^*.

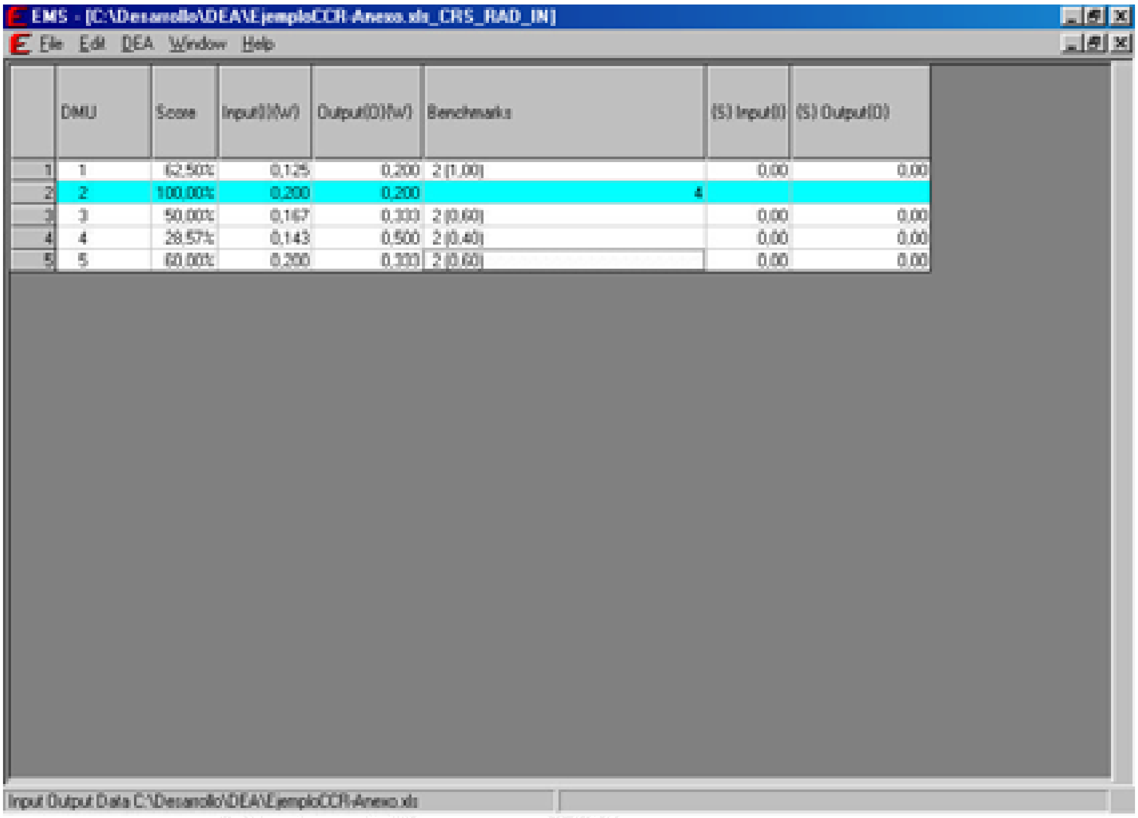
Input {I}{W}: es el peso óptimo del recurso empleado, en el caso que la orientación sea de entrada.

Output {O}{W}: es el peso del producto obtenido.

Benchmarks: define el conjunto de referencia para las unidades de decisión. Entre paréntesis se expresa la intensidad (λ_j) con la que la unidad de decisión se proyecta sobre la unidad/des del conjunto de referencia.

{S}Input{I} : es la variable de holgura del recurso, z_i, en el caso considerado z_1, expresando la reducción de carácter rectangular (variación horizontal) a realizar por las unidades para proyectarse sobre la frontera eficiente.

{S}Output{O}: es la variable de holgura del producto, s_r, expresando la reducción de carácter rectangular (variación vertical) a realizar las unidades para proyectarse sobre la frontera eficiente.



EMS - [C:\Desarrollo\DEA\EjemploCCR-Anexo.xls_CRS_RAD_IN]

File Edit DEA Window Help

	DMU	Score	Input(I)(W)	Output(O)(W)	Benchmarks	(S) Input(I)	(S) Output(O)
1	1	62,50%	0,125	0,200	2 (1,00)	0,00	0,00
2	2	100,00%	0,200	0,200	4		
3	3	50,00%	0,167	0,333	2 (0,60)	0,00	0,00
4	4	28,57%	0,143	0,500	2 (0,40)	0,00	0,00
5	5	60,00%	0,200	0,333	2 (0,60)	0,00	0,00

Input Output Data C:\Desarrollo\DEA\EjemploCCR-Anexo.xls

Figura.A.V.4. Pantalla EMS. Problema CCR-Input.
Elaboración. Propia.

Una de las principales críticas al modelo de Charnes, Cooper y Rhodes (1978) fue el hecho de que el modelo que ellos plantearon calcula la eficiencia de las unidades bajo la hipótesis de retorno de escala constantes. De esta forma, la dimensión de las unidades que se comparaban debe ser parecida, es decir, las unidades no eficientes han de tener capacidad para alcanzar el nivel de eficiencia de la unidad o unidades más eficientes. A este tipo de eficiencia, planteada en el modelo anterior, se le denomina eficiencia global y tiene lugar cuando la unidad seleccionada de referencia es la de mayor productividad de todas la unidades que se están estudiando. Pero también se podrían considerar problemas donde las unidades tuvieran dimensiones diferentes al de las unidades eficientes no pudiendo ser capaces de conseguir alcanzar la productividad de estas. Así, pues el estudio se realizará a través de la eficiencia técnica, esta hipótesis se denomina *retorno de escala variable*.

Para solventar este inconveniente y poder trabajar con problemas de retorno de escala variable, Banker, Charnes y Cooper [20] (1984), añaden al modelo anterior:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

[20]en adelante lo denominaremos modelo BCC.

Esta restricción impone que el punto de referencia en la frontera de producción para la DMU_0 sea combinación convexa de las otras DMU´s eficientes observadas. Introduciendo la restricción en el modelo CCR-Input, resultaría el siguiente modelo:

$$Min\ w_0\text{-}\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{r=1}^{s} s_r\right]$$

$$\text{Sujeto a:}\quad 0 = w_0 x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - z_i \quad ,i=1,\ ...,\ m$$

$$y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r \quad ,\ r=1,\ ...,\ s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j\ , z_i, s_r \geq 0,\ \forall i, j, r$$

Siendo su expresión en forma primal la siguiente:

$$Max\ h_o = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - u_0$$

Sujeto a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + u_0 \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon\ ;\ u_0 \ \text{ variable libre}$$

donde u_0: es un indicador de retornos de escala.

Al igual que el modelo CCR-Input las unidades eficientes tomarán valores $w_0^* = 1$ y $z_i^*, s_r^* = 0$.

El modelo puede estar orientado también hacia los outputs, es lo que se denomina un *modelo BCC con orientación de salida*. En este caso, el modelo para calcular los niveles de eficiencia se expresaría analíticamente de la forma siguiente:

$$Max\ t_0 + \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m} z_i + \sum_{r=1}^{s} s_r\right]$$

Sujeto a:

$$0 = x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - z_i \quad , \quad i=1, ..., m$$

$$y_{r0}t_0 = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r\, , \quad r = 1,...,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i, s_r \geq 0,\ \forall i, j, r$$

El problema expresado en forma primal es el siguiente:

$$Min\ h_0 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_{i0} - v_0$$

$$\text{Sujeto a :} \qquad \sum_{r=1}^{n} u_r y_{r0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0 \leq 0\ ,\ j=1,...,n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon\ ;\ v_o \quad \text{variable libre}$$

donde v_0 es un indicador de retornos de escala.

Cada uno de los modelos planteados anteriormente busca determinar la eficiencia de una unidad de decisión con respecto a la frontera de producción determinada por las mejores observaciones. De esta forma, los valores de eficiencia, o valores proyectados, dependerán de la forma de la frontera y del sistema de evaluación implícito en cada modelo DEA.

Dados los valores para cada DMU, con el modelo se medirá la eficiencia para cada DMU, por lo tanto se tendrán que realizar *n* optimizaciones. La optimización produce un conjunto de valores positivos, o nulos, denominados u^* y v^*, que generarán el óptimo h^*, sólo si la DMU evaluada resulta eficiente.

Para estudiar las ineficiencias y sus causas de las distintas DMU´s, a modo de ejemplo la unidad de decisión, DMU_1, tendrá que ser comparada con una unidad virtual, o unidad de referencia $DMU_{1'}$, que es combinación lineal de DMU_2 y DMU_3.

A continuación se presenta un ejemplo del modelo de retornos de escala variable con orientación de salida, modelo BCC-Output.

Ejemplo ilustrativo

En la tabla A.V.3 se detalla la relación de input empleado y output obtenido por cinco empresas de un determinado sector, las cuales actúan en diferentes dimensiones. Suponer que se desea conocer hasta qué punto cada una de las empresas consideradas está produciendo de forma eficiente a partir de los recursos que emplea.

Tabla.A.V.3. Datos problema BCC-Output.

Empresa	Input	Output
1	30	2
2	25	6
3	30	10
4	40	8
5	40	12

Elaboración. Propia.

A partir de los datos se podría evaluar la eficiencia de la empresa 1 mediante el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Max } t_0 + \varepsilon[s_1 + z_1]$$

s.a:

$$t_0 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 10\lambda_3 + 8\lambda_4 + 12\lambda_5 + s_1 \geq 0$$

$$30\lambda_1 - 25\lambda_2 - 30\lambda_3 - 40\lambda_4 - 5\lambda_5 + z_1 \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{5} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, z_1, s_1 \geq 0; \; j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$t_0 \text{ libre}$$

donde se obtiene que la empresa 1 no es eficiente, ya que $t_0^* = 5$, es decir puede producir cinco veces más de lo que hasta ahora ha estado produciendo con un nivel de input de 2 unidades. Además todos los multiplicadores resultan nulos, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5 = 0$, a excepción de $\lambda_3 = 1$, indicando que la empresa 1 se debe proyectar sobre la empresa eficiente 3 para actuar con eficiencia.

En definitiva, si la empresa 1 desea llegar a alcanzar niveles de eficiencia debería utilizar y obtener los siguientes niveles de factor y producto:

$$x_1^* = \lambda_3 \cdot x_3 = 1 \cdot 30 = 30 \text{ unidades de input}$$

$$y_1^* = \lambda_3 \cdot y_3 = 1 \cdot 10 = 10 \text{ unidades de output}$$

Siendo el incremento de output:

$$\Delta y_1 = \lambda_3 y_3 - y_{10} = 10 - 2 = 8$$

y la mejora de input:

$$\Delta x_1 = z_1^* = 0$$

Así mismo, la empresa 4 tendrá que aumentar su nivel de output producido en 4 unidades, respecto al nivel actual.

En la tabla A.V.4 se detallan los índices de eficiencia obtenido para cada una de las empresas restantes. Así como el conjunto de referencia sobre el cual la empresa en cuestión se proyecta, reflejándose entre paréntesis el valor de coeficiente multiplicador.

Tabla.A.V.4. Indices de eficiencia. Modelo BCC-Output.

Empresa	Eficiencia(%)	Conjunto de Referencia
1	500,00%	3(1,00)
2	100,00%	0
3	100,00%	1
4	150,00%	5(1,00)
5	100,00%	1

Elaboración. Propia.

En la figura A.V.5 se expresa la representación gráfica del problema.

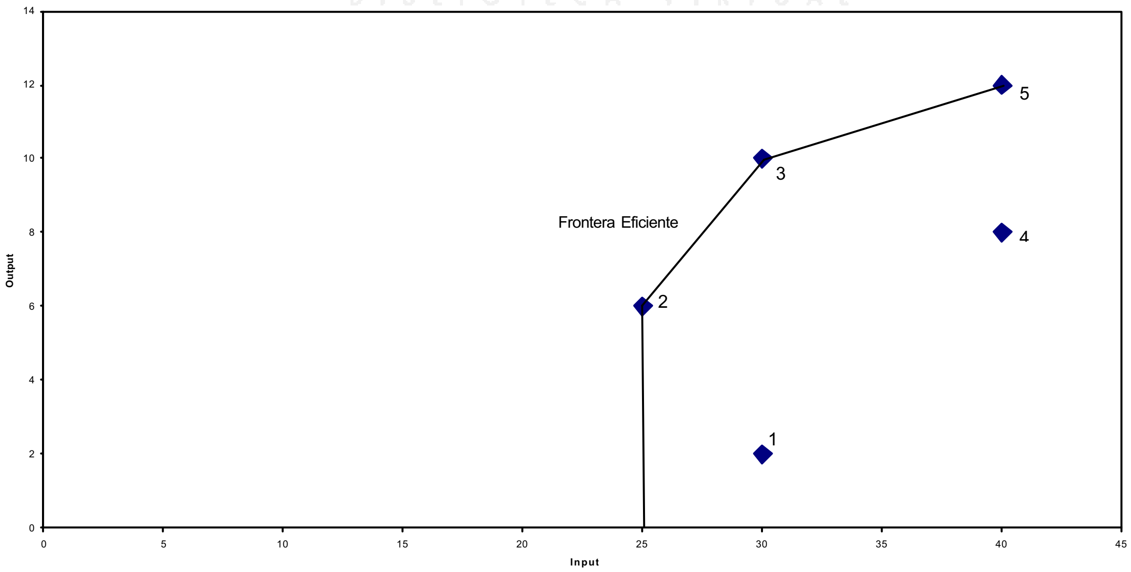


Figura.A.V.5. Situación geométrica de las empresas. BCC-Output.
Elaboración. Propia

Los resultados presentados por el programa informático EMS se exponen en la figura A.V.6.

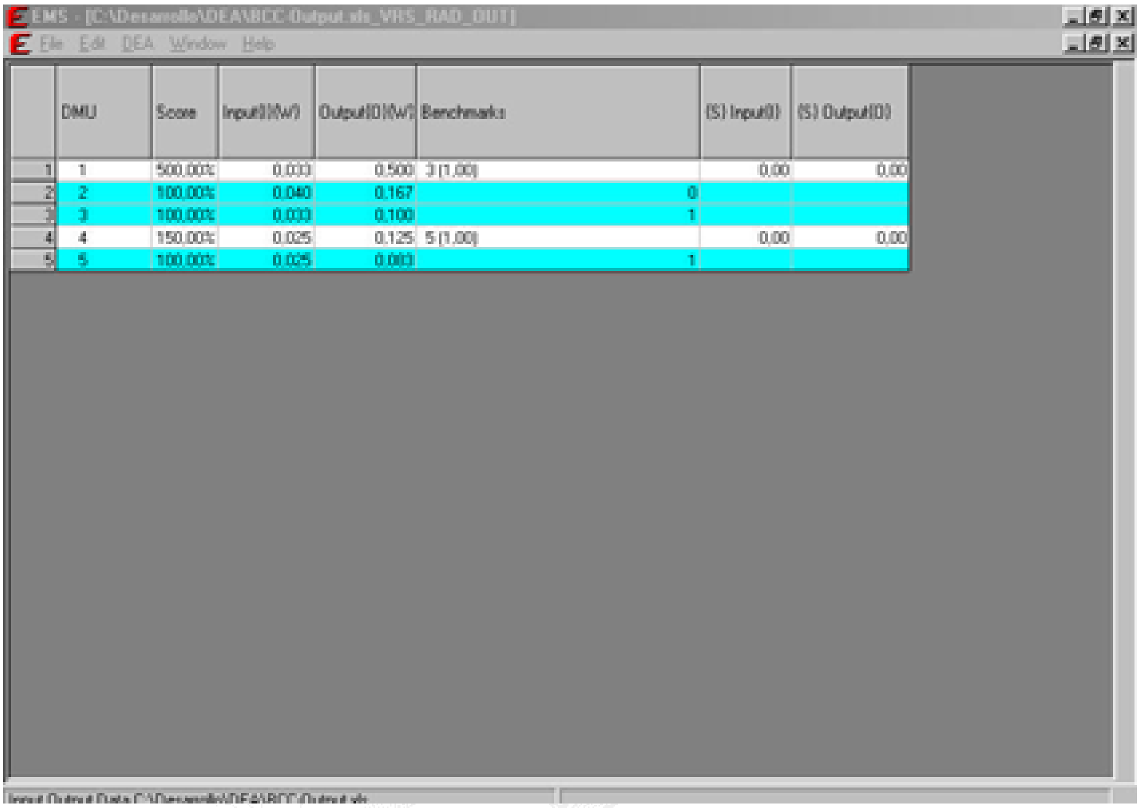


Figura.A.V.6. Pantalla EMS. Problema BCC-Output.
Elaboración. Propia.